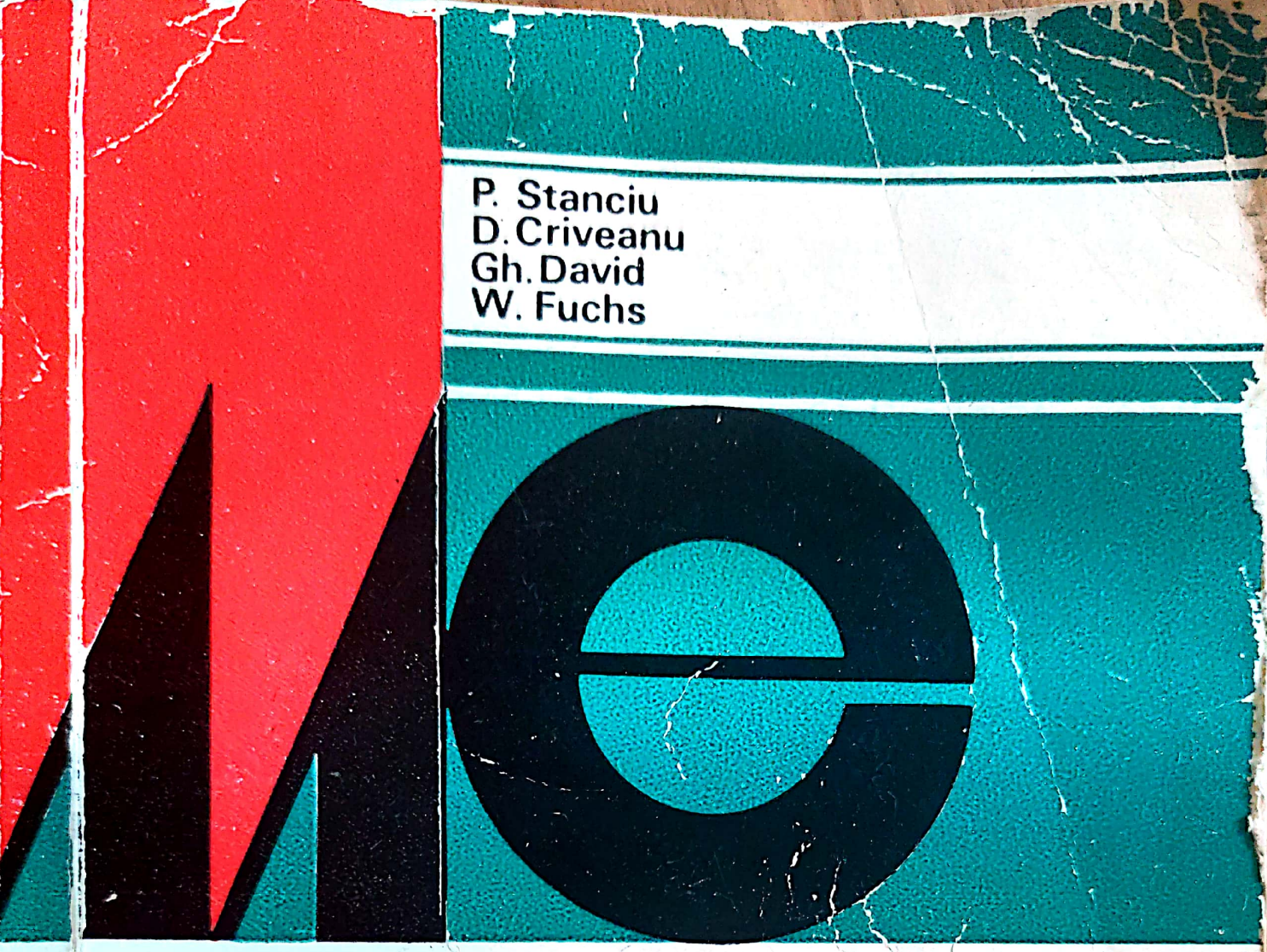
P. Stanciu
D. Criveanu
Gh. David
W. Fuchs



MATEMATICI APLICATE ÎN ECONOMIE

EDITURA FACLA

P. STANCIU

D. CRIVEANU

GH. DAVID

W. FUCHS

MATEMATICI APLICATE ÎN ECONOMIE

Volumul I

Chirută C.
Iași, 20 oct 1982

EDITURA FACLA
TIMIȘOARA, 1981

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Conducerea și planificarea științifică a proceselor economice impune utilizarea unor instrumente moderne capabile să facă față complexității, interdependenței și dinamicii problemelor economice și progresului științifico-tehnic propriu socialismului. În acest context, științele economice devin, pe lîngă cele tehnice, un domeniu esențial de aplicare a matematicii.

Prin conținutul ei și prin modul de abordare a problemelor lucrarea este destinată îndeosebi studenților din învățămîntul economic, dar poate fi utilă și în pregătirea studenților din învățămîntul tehnic sau celor de la facultățile de matematică. Ea se adresează de asemenea economiștilor, inginerilor, profesorilor de matematică, tuturor celor interesați în domeniul matematicilor aplicate.

În dezvoltarea materialului cuprins în lucrare am ținut cont de nivelul pregătirii matematice a absolvenților de liceu, cu toate că în mod inevitabil au fost reluate și extinse anumite cunoștințe dobîndite. În ideea de a pune la îndemîna cititorului, pe cît posibil, aparatul matematic utilizat frecvent, lucrarea are în structura sa și elemente care nu sînt sau nu par a fi direct legate de uzul curent în investigația științifică a problemelor practice. Includerea acestor elemente a fost necesară pentru realizarea anumitor demonstrații, cît și pentru a respecta unitatea lucrării. De aceea nu ne-am limitat doar la a formula rezultate și a

Scanned with OKEN Scanner

ilustra modul lor de aplicare, ci dimpotrivă în majoritate ele au fost demonstrate avînd în vedere pe de o parte valoarea lor formativă, iar pe de altă parte contribuția demonstrațiilor la formarea gîndirii matematice. Demonstrațiile s-au efectuat respectînd anumite rigurozități, posibile în limitele spațiului și a scopului propus. Dealtfel, fiecare din părțile lucrării ar putea constitui tratate separate, ceea ce a impus selectarea materialului prioritar. Unele rezultate ale căror demonstrații depășesc cadrul lucrării au fost doar formulate și exemplificate. Partea teoretică este completată prin exemple și aplicații.

În măsura posibilităților, lucrarea a fost astfel redactată încît lectura unei anumite părți să nu necesite consultarea altora. Referirile s-au făcut în scopul justificării limbajului folosit și a întregirii viziunii asupra tematicii abordate. Modul de expunere urmărește să înlesnească apropierea cititorilor de literatura de specialitate diversificată și dispersată în numeroase lucrări.

Autorii

Scanned with OKEN Scanner

P. Stanciu, D. Criveanu :

I. **ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ**

P. Stanciu, D. Criveanu :

II. **NOȚIUNI DE GEOMETRIE ANALITICĂ**

Gh. David :

III. **ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ**

P. Stanciu, D. Criveanu :

III. **PROGRAMAREA LINIARĂ**

W. Fuchs :

IV. **APLICAȚII ALE TEORIEI GRAFURILOR**

Scanned with OKEN Scanner

I. ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ

1. ALGEBRĂ MATRICEALĂ

§ 1.1. GENERALITĂȚI

Numim *matrice* o mulțime de mn numere aranjate într-un tablou cu m linii și n coloane. De exemplu :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

este o matrice cu m linii și n coloane, adică de tipul $m \times n$. Numerele reale sau complexe a_{ij} se numesc *elementele* matricei. Elementul a_{pq} este situat în linia p, coloana q. Prescurtat, matricea se mai notează prin $A=(a_{ij})_{m\times n}$, indicii indicînd tipul matricei.

Matricea se deosebește de determinant prin :

— determinantul este un tablou pătratic, pe cînd matricea poate să fie un tablou dreptunghiular ;

— determinantul reprezintă o valoare, pe cînd matricea este un simplu tablou.

Prin notația $A \geqslant a$, unde $a \in R$, înțelegem că toate elementele matricei sînt mai mari decît a. În particular, dacă $A \geqslant 0$ toate elementele matricei sînt nenegative.

Numim *matrice nulă* sau *matrice zero* o matrice care are toate elementele nule. Notăm matricea zero prin $(0)_{m\times n}$ sau 0. În ultima notație vom subînțelege întotdeauna că matricea aparține unui anumit tip. Matricea de tipul $1\times n$ este un *vector linie*, iar cea de tipul $n \times 1$ este un *vector coloană*.

Scanned with OKEN Scanner

O matrice $A=(a_{ij})_{n\times n}$ cu același număr de linii și coloane se numește matrice pătrată, iar n este *ordinul matricei* ; o notăm mai simplu $A=(a_{ij})_n$.

Elementele a_{ij}, $i=1\div n$, formează *diagonala principală* a matricei. Suma elementelor de pe diagonala principală se numește *urma* matricei.

Determinantul obținut dintr-o matrice pătrată schimbînd notația de matrice în cea de determinant îl numim *determinant al matricei* A și-l notăm prin det. A sau $|a_{ij}|_n$. Dacă det. $A\neq 0$ matricea este *nesingulară* ; în caz contrar, (det. $A=0$), matricea se numește *singulară*.

O matrice pătrată se numește *triunghiulară* dacă toate elementele situate de o parte a diagonalei principale sînt nule. Determinantul ei se reduce la produsul elementelor de pe diagonala principală.

Dacă elementele situate de ambele părți ale diagonalei principale sînt nule, matricea se numește *diagonală*. Ea are toate elementele nule, cu excepția celor de pe diagonala principală. Matricea diagonală care are toate elementele de pe diagonala principală egale între ele, adică $a_{ii}=k$, $\forall i=1\div n$, se numește *matrice scalară*. Folosind *simbolul lui Kronecker*

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 0, & \text{dacă } i\neq j \\ 1, & \text{dacă } i=j, \end{cases} \tag{1.2}$$

o matrice scalară poate fi scrisă sub forma $K=(k\delta_{ij})_n$. Matricea scalară cu toate elementele situate pe diagonala principală egale cu 1 se numește *matrice unitate*. Ea se poate scrie sub forma $U=(\delta_{ij})_n$. Fiecărui ordin de matrice pătrată îi corespunde o matrice unitate. De exemplu :

$$U_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este matricea unitate de ordinul trei.

Matricea obținută din matricea $A=(a_{ij})_{m\times n}$ prin schimbarea semnelor tuturor elementelor se numește *opusa* matricei A și o notăm cu $-A=(-a_{ij})_{m\times n}$. Dacă A este o matrice pătrată de ordinul n

$$\text{det. } (-A)=(-1)^n \text{ det. } A.$$

O matrice pătrată este *simetrică* dacă $a_{ij}=a_{ji}$, $\forall i, j=1\div n$, adică dacă elementele simetric așezate față de diagonala principală sînt egale. O matrice pătrată este *antisimetrică* dacă $a_{ij}=-a_{ji}$, $\forall i,j=1\div n$. Din $a_{ii}=-a_{ii}$ rezultă $a_{ii}=0$, adică elementele de pe diagonala principală a unei matrice antisimetrice sînt nule.

§ 1.2. EGALITATEA MATRICELOR

Fie $A=(a_{ij})_{m\times n}$ și $B=(b_{ij})_{m\times n}$ două matrice de același tip. Elementele a_{pq} și b_{pq} situate în același loc în cele două matrice (linia p coloana q) se numesc *analoage*.

Două matrice de același tip sînt egale dacă elementele lor analoage sînt egale ; rezultă

$$A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij},\ \forall \begin{cases} i=1\div m \\ j=1\div n. \end{cases} \tag{1.3}$$

Egalitatea matricelor reducîndu-se la egalitatea a mn numere, se bucură de aceleași proprietăți ca și egalitatea numerelor.

Dacă două matrice pătrate sînt egale, determinanții lor sînt egali. Reciproca nu este adevărată. Două matrice pătrate pot avea determinanții egali fără ca ele să fie egale. De exemplu, pentru matricele

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$\det A=\det B=1$, dar $A\neq B$.

§ 1.3. OPERAȚII CU MATRICE

1. **Suma și diferența matricelor.** Fie $A=(a_{ij})_{m\times n}$ și $B=(b_{ij})_{m\times n}$. Suma celor două matrice de același tip este tot o matrice de același tip, ale cărei elemente sînt egale cu suma elementelor *analoage* ale matricelor termeni. Notînd

$$A+B=C,$$

unde $C=(c_{ij})_{m\times n}$ rezultă

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ \forall \begin{cases} i=1\div m \\ j=1\div n. \end{cases} \tag{1.4}$$

Fie $\mathcal{M}$ mulțimea matricelor de același tip. Dacă $A,\ B\in\mathcal{M}$ atunci $A+B=C\in\mathcal{M}$, adică adunarea este o operație *internă* a mulțimii $\mathcal{M}$. Reducîndu-se la mn sume de numere, adunarea matricelor are următoarele proprietăți :

a. $A+B=B+A$, adunarea este *comutativă* ;

b. $(A+B)+C=A+(B+C)$, este *asociativă* ;

c. $A+0=0+A$, matricea zero de același tip este *neutră* la adunare ;

d. $A+(-A)=(-A)+A=0$, $A=(-a_{ij})_{m\times n}$ fiind *opusa* matricei A.

Datorită proprietăților b, c și d, mulțimea matricelor de același tip formează un grup față de operația de adunare (operație internă a mulțimii). Adunarea fiind comutativă, zicem că grupul este *comutativ* sau *abelian*.

Diferența dintre două matrice A și B de același tip este suma dintre matricea A și opusa lui B, adică $A-B=A+(-B)$. Dacă notăm cu $C=(c_{ij})_{m\times n}$ diferența celor două matrice,

$$c_{ij}=a_{ij}-b_{ij},\ \forall \begin{cases} i=1\div m \\ j=1\div n. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

În particular, suma sau diferența a două matrice triunghiulare (superior sau inferior) este tot o matrice triunghiulară Suma sau diferența a două matrice diagonale este tot o matrice diagonală (sau 0 dacă ele sînt opuse).

2. **Înmulțirea unei matrice cu un scalar.** Numim *scalar* orice număr algebric. Definim produsul dintre scalarul λ și matricea $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ca o matrice ale cărei elemente sînt elementele matricei A multiplicate prin λ:

$$\lambda\,(a_{ij})_{m\times n}=(\lambda a_{ij})_{m\times n}. \tag{1.5}$$

Matricea opusă matricei A este produsul ei prin -1. Fie $\mathcal{M}$ mulțimea matricelor de același tip și S mulțimea scalarilor. Operația de înmulțire a matricelor cu un scalar este o *operație externă* a mulțimii $\mathcal{M}$ definită prin intermediul mulțimii S. Proprietățile produsului unei matrice printr-un scalar sînt:

a. $\lambda\,(V_1+V_2)=\lambda V_1+\lambda V_2$;

b. $(\lambda_1+\lambda_2)V=\lambda_1 V+\lambda_2 V$;

c. $(\lambda_1\lambda_2)V=\lambda_1(\lambda_2 V)=\lambda_2(\lambda_1 V)$;

d. $\exists 1\in S$ astfel ca $1\cdot V=V\cdot 1=V$,

adică este distributiv în $\mathcal{M}$ și S (relația a, b), asociativ în S (relația c) și există în S element unitate (relația d).

În mulțimea $\mathcal{M}$ a matricelor de același tip am definit adunarea, operație internă față de care formează un grup abelian și înmulțirea cu un scalar, operație față de care se bucură de proprietățile a–d. Rezultă că mulțimea $\mathcal{M}$ a matricelor de același tip formează un *spațiu vectorial.*

3. **Înmulțirea matricelor.** Fie $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times p}$, două matrice astfel încît numărul de coloane ale primei să fie egal cu numărul de linii ale celei de a doua. Produsul AB al celor două matrice este tot o matrice $C=(c_{ij})_{m\times p}$, avînd numărul de linii egal cu cele ale primului factor A și numărul de coloane egal cu numărul de coloane ale celui de al doilea factor B, iar elementele date de relația

$$c_{rs}=a_{r1}b_1s+a_{r2}b_{2s}+\ldots+a_{rn}b_{ns}=\sum_{k=1}^{n}a_{rk}b_{ks}, \tag{1.6}$$

unde $r=1\div m$, $s=1\div p$. Elementul din linia r coloana s a matricei produs este egal cu suma produselor elementelor liniei r a matricei A prin elementele din coloana s a matricei B.

Din definiție rezultă că, în general, produsul a două matrice *nu este comutativ.* Mai mult, dacă AB este o operație posibilă, operația BA este posibilă numai dacă numărul de linii ale matricei A este egal cu numărul de coloane ale lui B.

Produsul a două matrice are următoarele proprietăți:

a. este asociativ, $A\,(BC)=(AB)\,C$;

b. este distributiv față de adunare, $A\,(B+C)=AB+BC$;

c. este asociativ față de un factor scalar, $\lambda\,(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$;

d. produsul unei matrice prin matricea nulă este o matrice nulă, $A\cdot 0=0$.

Bineînțeles aceste proprietăți sînt valabile numai atunci cînd operațiile pe care le conțin sînt definite.

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm cazul în care matricele factori sînt pătrate de același ordin : $A=(a_{ij})_n$, $B=(b_{ij})_n$. În acest caz ambele produse AB și BA sînt posibile, dar în general $AB\neq BA$. Dacă $AB=BA$ matricele A și B se numesc *permutabile*. De exemplu

$$\begin{pmatrix} a-b & b \\ b & 2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & 2a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab \\ -ab & b^2 \end{pmatrix}$$

și matricele factori sînt permutabile.

Fie $A=(a_{ij})_n$, $a_{ij}=k\delta_{ij}$, o matrice sclară și $B=(b_{ij})_n$ o matrice pătrată de același ordin ; elementele matricei AB sînt date de relația

$$c_{pq}=\sum_{h=1}^{n} a_{ph}b_{hq}=k\sum_{h=1}^{n}\delta_{ph}b_{hq}=kb_{pq}, \tag{1.7}$$

iar al matricei BA

$$c_{st}=\sum_{h=1}^{n} b_{sh}a_{ht}=k\sum_{h=1}^{n} b_{sh}\delta_{ht}=kb_{st}. \tag{1.8}$$

Produsul dintre o matrice scalară și o matrice pătrată de același ordin este egal cu produsul dintre scalarul k (de pe diagonala principală) și matrice.

În particular, pentru $k=1$, matricea scalară devine matricea unitate și

$$UA=AU=A, \tag{1.9}$$

adică matricea unitate este elementul unitate (de efect nul) în înmulțirea matricelor pătrate.

Dacă A și B sînt două matrice pătrate de același ordin

$$\det.\ (AB)=\det.\ A.\ \det.\ B,$$

deoarece produsul a doi determinanți se poate efectua la fel ca produsul a două matrice, adică linii cu coloane, pe lîngă înmulțirea linii cu linii, coloane cu linii sau coloane cu coloane.

Produsul a doi determinanți diferiți de zero, fiind diferit de zero, *produsul a două matrice pătrate nesingulare este o matrice pătrată nesingulară* și reciproc dacă *produsul a două matrice pătrate este o matrice nesingulară, matricele factori sînt nesingulare.*

Spre deosebire de cazul determinanților, produsul a două matrice pătrate poate fi nul fără ca una din matricele factori să fie nulă. De exemplu, pentru matricele

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\Rightarrow AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

matricele A,B fiind diferite de matricea zero. Zicem că A și B sînt *divizori ai lui zero.* Deoarece $BA\neq 0$, A este *divizor la stînga* și B *divizor la dreapta.*

Scanned with OKEN Scanner

§ 1.4. MATRICEA INVERSĂ

1. **Matricea transpusă.** Fie matricea $A=(a_{ij})_{m\times n}$. Matricea $A^T=(a_{ji})_{n\times m}$ obținută schimbînd în A liniile prin coloane se numește *transpusa* matricei A.

De exemplu, transpusa matricei

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{este} \quad A^T=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proprietățile transpusei unei matrice sînt:

a. $(A+B)^T=A^T+B^T$;

b. $(kA)^T=kA^T$;

c. $(A^T)^T=A$;

d. $(AB)^T=B^TA^T$.

Primele trei proprietăți rezultă imediat din definiția transpusei. Să demonstrăm proprietatea d: *transpusa unui produs de matrice este egală cu produsul transpuselor matricelor factori luate în ordine inversă.*

Fie $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times p}$. Notăm $(AB)^T=(c_{ij})_{p\times m}$ și $B^TA^T=(\gamma_{ij})_{p\times m}$. Avem

$$c_{pq}=\sum_{k=1}^{n} a_{qk}b_{kp}, \qquad \gamma_{pq}=\sum_{k=1}^{n} b_{kp}a_{qk},$$

deci cele două matrice sînt egale.

Dacă matricea $A=(a_{ij})_n$ este simetrică, $a_{ij}=a_{ji}$. Rezultă că *o matrice simetrică este egală cu transpusa ei.* Reciproc, dacă $A=A^T$ matricea A este simetrică.

Dacă matricea $A=(a_{ij})_n$ este antisimetrică, $a_{ji}=-a_{ij}$ și $A+A^T=0$.

2. **Determinarea matricei inverse.** Fie $A=(a_{ij})_n$ o matrice pătrată nesingulară și $\Delta=\det. A$, determinantul ei. Pentru a obține matricea inversă a matricei A efectuăm următoarele operații:

— scriem matricea A^T, transpusa matricei A;

— scriem matricea A^*, *matricea asociată* matricei A înlocuind elementele a_{ij} ale matricei A^T prin complemenții lor algebrici din det. A^T;

— înmulțim matricea asociată A^* prin $\frac{1}{\Delta}$ și obținem matricea A^{-1}, matricea inversă a matricei A, adică $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}A^*$.

Reamintim că *complementul algebric* A_{pq} al elementului a_{pq} din determinantul $\Delta=(a_{ij})_n$ este

$$A_{pq}=(-1)^{p+q}M_{pq},$$

unde M_{pq} este determinantul minor al elementului a_{pq}, obținut eliminînd în Δ linia p și coloana q. De asemenea

$$\Delta=\sum_{h=1}^{n} a_{ph}A_{ph}, \qquad \Delta=\sum_{h=1}^{n} a_{hq}A_{hq},$$

cele două relații reprezentînd respectiv dezvoltarea determinantului după elementele liniei p sau coloanei q.

Aplicație. Să se determine inversa matricei

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soluție. Avem succesiv

$$\det.\ A=2\neq 0, \qquad A^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2, \quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=0, \quad A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2 \text{ etc.},$$

iar

$$A^*=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -4 \\ 6 & 2 & -6 \end{pmatrix} \text{ și } A^{-1}=\frac{1}{2}A^*=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. **Proprietățile matricei inverse.** Din modul în care s-a introdus matricea inversă a unei matrice rezultă unicitatea ei, cît și faptul că matricele singulare nu admit inversă.

Teorema 1. *O matrice pătrată nesingulară și matricea sa inversă sînt permutabile ; produsul lor este egal cu matricea unitate.*

Fie $A=(a_{ij})_n$ o matrice nesingulară, $\Delta=\det.\ A$, $A^*=(A_{ji})_n$ matricea asociată și $A^{-1}=(\alpha_{ij})_n=\frac{1}{\Delta}A^*$ matricea inversă. Notînd cu c_{ij} elementele produsului AA^{-1}, avem succesiv

$$c_{pq}=\sum_{h=1}^{n} a_{ph}\alpha_{qh}=\frac{1}{\Delta}\sum_{h=1}^{n} a_{ph}A_{qh}=\frac{1}{\Delta}\delta_{pq}\Delta=\delta_{pq},$$

unde δ_{pq} este simbolul lui Kronecker. Rezultă $AA^{-1}=U$. Analog se demonstrează că $A^{-1}A=U$ și deci

$$AA^{-1}=A^{-1}A=U. \tag{1.10}$$

Aplicînd proprietatea pentru determinanții celor două matrice rezultă

$$\det.A.\ \det.A^{-1}=1.$$

Doi determinanți al căror produs este egal cu 1 se numesc reciproci : *determinantul unei matrice și determinantul matricei inverse sînt reciproci.*

Teorema 2. *Dacă A și B sînt două matrice pătrate de același ordin și $AB=U$, matricele sînt nesingulare și una este inversa celeilalte.* Din $AB=U$ rezultă

$$\det.A.\ \det.B=\det.U=1,$$

deci det. $A\neq 0$, det. $B\neq 0$; matricele sînt nesingulare. Fie A^{-1}, B^{-1} respectiv inversele matricelor A și B. Înmulțind relația $AB=U$ la stînga cu A^{-1}, avem succesiv

$$A^{-1}(AB)=A^{-1}U,\quad (A^{-1}A)\,B=A^{-1},\quad UB=A^{-1},\quad B=A^{-1}.$$

Înmulțind aceeași relație la dreapta cu B^{-1}, rezultă $A=B^{-1}$.

Teorema 3. *Inversa produsului a două matrice pătrate nesingulare este egal cu produsul inverselor luate în ordine inversă.*

Fie A, B două matrice pătrate nesingulare de același ordin și A^{-1}, B^{-1} inversele lor. Produsul matricelor AB este tot o matrice nesingulară, iar

$$B^{-1}A^{-1}(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)\,B=B^{-1}UB=B^{-1}B=U$$

și în baza proprietății anterioare $B^{-1}A^{-1}$ este inversa lui AB.

Proprietatea se menține pentru un produs finit de matrice nesingulare, adică

$$(A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n)^{-1}=A_n^1A_{n-1}^{-1}\ldots A_2^{-1}A_1^{-1}. \tag{1.11}$$

Teorema 4. *Transpusa inversei unei matrice este egală cu inversa transpusei matricei date.*

Aplicăm relației $AA^{-1}=U$ proprietatea transpusei unui produs de matrice

$$(A^{-1}A)^T=U^T\ \Rightarrow\ A^T\cdot(A^{-1})^T=U$$

și în baza teoremei 2

$$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}.$$

Teorema 5. *Inversa inversei unei matrice este matricea dată.*

Din

$$A^{-1}\cdot(A^{-1})^{-1}=U$$

prin înmulțire la stînga cu A rezultă $(A^{-1})^{-1}=A$.

§ 1.5. OPERAȚII CU MATRICE PRIN PARTIȚIONARE

Prin partiționarea unei matrice înțelegem împărțirea matricei în submatrice prin linii orizontale și verticale.

De exemplu, matricea

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \text{ se poate scrie } A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

unde

$$A_{11}=A_{22}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{12}=A_{22}=U_2$$

sînt submatrice ale matricei A.

Operațiile cu matrice prin partiționare, în special determinarea matricei inverse, sînt avantajoase de aplicat atunci cînd unele din submatrice sînt matrice zero sau matrice unitate.

Două matrice sînt egale cînd se pot partiționa în submatrice egale. Suma a două matrice partiționate în același mod este egală cu matricea care are ca submatrice suma submatricelor matricelor termeni.

Pentru înmulțirea prin partiționare a matricelor $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times p}$, partiționarea lor trebuie făcută astfel încît să se poată efectua înmulțirea submatricelor. Astfel pentru matricele

$$A=\left(\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \text{ și } B=\left(\begin{array}{cc:c} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ \hdashline b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

avem

$$AB=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$$

Determinarea inversei prin partiționare se bazează pe posibilitatea partiționării unei matrice unitate în submatrice unitate și submatrice zero și pe proprietatea că produsul dintre o matrice și inversa sa este o matrice unitate.

Fie matricea nesingulară $A=(a_{ij})_n$

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

unde A_{11} este o matrice nesingulară de ordinul $m<n$, iar B partiționată la fel cu A.

Scanned with OKEN Scanner

Din

$$AB=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} U_m & 0 \\ 0 & U_{n-m} \end{pmatrix},$$

se obține sistemul de ecuații matriceale

$$\begin{aligned} &A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=U_m \\ &A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}=0 \\ &A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}=0 \\ &A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}=U_{n-m}, \end{aligned}$$

sistem din care se deduc submatricele B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}. Calculul se simplifică dacă cunoaștem inversa matricei A_{11}.

În particular, să determinăm matricea inversă a unei matrice pătrate $B=(b_{ij})_{n+1}$

$$B=\begin{pmatrix} A & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

obținută prin bordarea matricei nesingulare $A=(b_{ij})_n$ cu vectorul linie V de tipul $1\times n$ și vectorul coloană zero de tipul $n\times 1$ completați cu un ultim element egal cu unitatea.

Notînd

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} B_{11} & V_2 \\ V_1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Sistemul devine

$$AB_{11}=U_n,\ AV_2=0,\ VB_{11}+V_1=0,\ VV_2+(\alpha)=(1),$$

de unde

$$B_{11}=A^{-1},\ V_2=0,\ V_1=-VA^{-1},\ \alpha=1.$$

Obținem

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -VA^{-1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Aplicație. Să calculăm matricea inversă a matricei

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluție. Matricea A este de forma (1.12), unde matricea inversă a matricei B formată cu primele trei linii și coloane din A am calculat-o la aplicația de la § 1.4, iar $V=(1\ \ -2\ \ 3)$. Rezultă

$$VA^{-1}=(1\ \ -2\ \ 3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}=(3\ \ 2\ \ -4),\quad B^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 1.6. RANGUL UNEI MATRICE

1. **Definiție.** Dintr-o matrice $A=(a_{ij})_{m\times n}$, considerînd elementele a p linii și p coloane, unde

$$p \leqslant inf\ \{m, n\},$$

se obțin *determinanți minori* de ordinul p ai matricei.

Numim *rang* al matricei A, ordinul maxim al unui determinant minor diferit de zero. Notăm rangul matricei A prin rang A.

Din definiție, rangul matricei zero este zero, al matricei unitate U_n este n, al unei matrice pătrate nesingulare este egal cu ordinul matricei etc.

Numim *determinant principal* al unei matrice orice minor diferit de zero, de un ordin egal cu rangul matricei. În general, o matrice are mai mulți determinanți principali. În cazul unei matrice pătrate nesingulare, determinantul ei fiind diferit de zero, el este singurul determinant principal al matricei.

2. **Determinarea rangului unei matrice** cu ajutorul determinanților se bazează pe teorema : *dacă toți minorii de ordinul p sînt nuli și minorii de ordinul $p+1$ sînt toți nuli.*

Teorema rezultă din faptul că în dezvoltarea după elementele unei linii sau coloane a unui minor de ordinul $p+1$, toți determinanții minori sînt minori de ordinul p ai matricei A, deci nuli.

Pentru determinarea rangului matricei $A\neq 0$, calculăm determinanți de ordinul 2 pînă obținem unul diferit de zero sau arătăm că toți minorii de ordinul 2 sînt nuli. În primul caz, rang $A\geqslant 2$ și trecem la minorii de ordinul 3, în al doilea rang $A=1$. Dacă toți δ_3 sînt nuli rang $A=2$. Dacă $\exists\delta_3\neq 0$, rang $A\geqslant 3$ și trecem la determinanții de ordinul 4. Procedeul continuă în același mod.

Numărul mare de determinanți pe care trebuie să-i calculăm poate fi micșorat folosind teorema lui Kronecker : *dacă $\delta_p\neq 0$ este un minor al matricei A și toți minorii de ordinul $p+1$ obținuți prin bordarea lui δ_p sînt nuli, orice minor de*

ordinul $p+1$ *este nul.* Dar și în acest fel metoda comportă calcule laborioase, în special pentru matrice cu număr mare de linii sau coloane.

În cazul unor matrici de dimensiuni mari, care conțin submatrice de structuri deosebite (unitate, diagonale, triunghiulare etc.), rangul se poate determina folosind proprietăți ale determinanților și rangurilor cunoscute ale unor submatrice.

Aplicație. Să se determine rangul matricei

$$A=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Soluție. Se observă că suma primelor trei linii este egală cu suma ultimelor două, deci toți minorii de ordinul 5 sînt nuli. Suprimînd linia a 4-a matricea formată cu primele patru coloane este triunghiulară și are toate elementele de pe diagonala principală egale cu 1, deci nesingulară. Rangul matricei este egal cu 4.

Mai general, să considerăm matricea

$$M=\begin{pmatrix} U_n & U_n & \dots & U_n \\ M_1 & M_2 & \dots & M_m \end{pmatrix},$$

unde U_n este o matrice unitate, iar M_i o matrice de tipul $m \times n$ cu elementele de pe linia i egale cu 1, celelalte fiind nule. Matricea A se obține din M pentru $m=2$ și $n=3$. Aplicînd procedeul folosit la determinarea rangului matricei A rezultă că, rang $M=m+n-1$.

3. **Determinarea rangului prin transformări elementare.** Numim transformări elementare într-o matrice următoarele operații :

a) schimbarea a două linii sau coloane între ele ;

b) înmulțirea elementelor unei linii sau coloane cu un număr diferit de zero ;

c) adunarea la elementele unei linii sau coloane a elementelor altei linii sau coloane înmulțite cu un același factor.

Două matrice obținute una din alta prin transformări elementare se numesc echivalente. Notația $A \sim B$ înseamnă A „echivalent" cu B. Aplicînd transformări elementare asupra unui determinant diferit de zero, el rămîne diferit de zero, pe cînd un determinant nul își păstrează valoarea. Rangul unei matrice fiind legat numai de noțiunea de determinant minor diferit de zero, rezultă că *două matrice echivalente au același rang.*

Pentru a determina rangul unei matrice prin transformări elementare, aducem matricea la o formă mai simplă pe care să putem citi rangul ei. Una din aceste forme este *forma canonică diagonală*, în care în colțul din stînga sus (Nord-Vest) apare o matrice unitate, celelalte elemente fiind nule.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicație. Să se determine rangul matricei

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluție. Avem succesiv

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix}\leftarrow \\ \\ \leftarrow\end{matrix}\sim\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 2 & -3 \\ 0 & 12 & -4 & 6 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & -3 \\ 0 & 12 & -4 & 6 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Explicăm modul în care am obținut fiecare matrice din cea anterioară.

a) Matricea a doua am obținut-o din A schimbînd linia a treia cu prima linie, pentru a avea elementul 1 în colțul N—V. Împărțirea cu -3 înmulțirea cu $-\frac{1}{3}$ a primei linii sau coloane, conducea la calcule ulterioare complicate.

b) Matricea a III-a am obținut-o din a doua, adunînd la elementele liniilor a doua și a III-a elementele primei linii înmulțite respectiv cu -2 și 3.

c) Matricea a IV-a am obținut-o din a III-a, adunînd la elementele coloanelor 2, 3, 4 elementele primei coloane înmulțite respectiv cu -4, 1, -1. Se observă că matricea a IV-a diferă de a III-a numai prin anularea elementelor de pe linia lui 1, cu excepția elementului 1. Regula este generală, dacă într-o matrice elementele unei linii sau coloane sînt zero, cu excepția unui singur element se obține o matrice echivalentă anulînd și pe coloana sau linia elementului respectiv toate celelalte elemente.

d) Matricea a V-a am obținut-o împărțind coloanele 2, 3, 4 respectiv cu -6, 2, -3.

e) Am adunat la linia a III-a linia a II-a înmulțită prin 2 și am aplicat proprietatea de la punctul c.

Colțul N—V al formei canonice conține o matrice unitate de ordinul doi, deci rang $A=2$.

Observație. În majoritatea problemelor în care intervine rangul unei matrice este necesar să determinăm și un determinant principal al matricei. Matricea unitate din forma canonică — ținînd seama de schimbările de linii și coloane efectuate în decursul determinării rangului — ocupă locul unui determinant diferit de zero din matricea inițială. În cazul exemplului tratat am schimbat linia a treia și prima între ele, deci

$$\delta=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2-4\neq 0$$

este un determinant principal al matricei.

Scanned with OKEN Scanner

4. Rangul unui produs de matrice.

Teorema 1. *Rangul unui produs de matrice nu poate depăși rangul fiecăreia dintre matricele factori.*

Demonstrație. Fie $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times p}$ și $C=AB=(c_{ij})_{m\times p}$. Presupunem că rang $A=r\leqslant$ rang $B=\rho$.

Să considerăm, pentru simplificarea scrierii, determinantul minor Δ^1_{r+1} format cu primele $r+1$ linii și coloane ale matricei C. Elementele primei coloane din Δ^1_{r+1}

$$c_{i1}=a_{i1}b_{11}+a_{i2}b_{21}+\ldots+a_{in}b_{n1},\quad i=1\div r+1,$$

fiind sume de n termeni, Δ^1_{r+1} se descompune într-o sumă de n determinanți în care pe prima coloană scoatem ca factori $b_{11}, b_{21},\ldots,b_{n1}$.

Celelalte coloane fiind de aceeași formă scotînd ca factori succesiv pe $b_{1h}, b_{2h},\ldots, b_{nh}$, $h=2, 3,\ldots, r+1$, determinantul Δ^1_{r+1} se descompune într-o sumă de minori de ordinul $r+1$ ai matricei A, înmulțiți cu produse de elemente din B. Deoarece rang $A=r$, toți acești determinanți sînt nuli, adică $\Delta^1_{r+1}=0$.

Procedînd în mod analog cu ceilalți minori de ordinul $r+1$ din C, rezultă rang $C\leqslant r$.

Dacă $\rho<r$ în descompunerea determinantului $\Delta^2_{\rho+1}$ în prima coloană se dau ca factori elementele matricei A. În final, $\Delta^2_{\rho+1}$ și toți minorii de ordinul $\rho+1$ din C fiind nuli, rang $C\leqslant\rho$.

Teorema 2. *Rangul unei matrice nu se schimbă dacă o înmulțim, la stînga sau la dreapta, cu o matrice pătrată nesingulară.*

Fie $A=(a_{ij})_{m\times n}$, rang $A=r$, $B=(b_{ij})_m$ o matrice pătrată nesingulară și $C=BA$. Notăm rang $C=\rho$ și în baza teoremei anterioare $\rho\leqslant r$.

Înmulțim $C=BA$ la stînga cu B^{-1} și din $A=B^{-1}C$ în baza aceleiași teoreme $r\leqslant\rho$. Rezultă rang $BA=$ rang $A=r$.

Scanned with OKEN Scanner

2. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

§ 2.1. GENERALITĂȚI. FORMA MATRICEALĂ

Numim sistem de m ecuații cu n necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_n$, un sistem de forma

$$(2.1)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = d_m, \end{cases}$$

în care toate necunoscutele intervin la gradul întîi.

Matricea $A=(a_{ij})_{m\times n}$ formată cu coeficienții necunoscutelor se numește *matricea sistemului*, rangul ei *rangul sistemului* de ecuații, iar un determinant principal al ei, *determinant principal* al sistemului. Notînd cu $D=(d_1d_2\ldots d_m)^T$ vectorul coloană al termenilor liberi, cu $X=(x_1x_2\ldots x_n)^T$ vectorul coloană al necunoscutelor, sistemul (2.1) se poate scrie matriceal sub forma

$$(2.2)\qquad AX=D$$

Dacă $D\neq 0$, sistemul se numește *neomogen*. În caz contrar, adică $D=0$, sistemul se numește *omogen*.

Numim *soluție* a sistemului, orice ansamblu ordonat de valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sau orice vector X care verifică relațiile (2.1) sau (2.2). Un sistem care admite cel puțin o soluție se numește compatibil. Dacă admite o singură soluție este *compatibil determinat*, iar în caz contrar, *compatibil nedeterminat*. Un sistem care nu admite nici o soluție zicem că este *incompatibil*.

Scanned with OKEN Scanner

În legătură cu sistemele de ecuații liniare se pun două probleme principale :

— *discuția* sistemelor de ecuații liniare, adică a stabili dacă sistemul este compatibil (determinat sau nedeterminat) sau incompatibil ;

— *rezolvarea* sistemului, adică determinarea soluției sau a soluțiilor lui în cazul în care este compatibil.

§ 2.2. SISTEME DE n ECUAȚII LINIARE CU n NECUNOSCUTE

Un sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute este de forma

$$AX=D, \tag{2.3}$$

unde $A=(a_{ij})_n$. Ne ocupăm, deocamdată, de sistemele în care A este nesingulară, adică

$$\Delta=\det. A \neq 0,$$

matricea A fiind nesingulară, $\exists A^{-1}$ și înmulțind (2.3) la stînga cu A^{-1} obținem

$$X=A^{-1} D, \tag{2.4}$$

care reprezintă soluția sistemului. Rezultă că, *un sistem de ecuații liniare cu n necunoscute, cu matricea sistemului nesingulară, este compatibil determinat.* Determinarea soluției prin formula (2.4) se numește *metoda matricei inverse* de rezolvare a unui sistem liniar.

Să arătăm că regula cunoscută a lui Cramer este exprimarea sub formă de determinați a formulei (2.4).

Din $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}(A_{ji})_n$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d_1A_{11}+d_2A_{21}+\ldots+d_iA_{i1}+\ldots+d_nA_{n1} \\ d_1A_{12}+d_2A_{22}+\ldots+d_iA_{i2}+\ldots+d_nA_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_1A_{1i}+d_2A_{2i}+\ldots+d_iA_{ii}+\ldots+d_nA_{ni} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_1A_{1n}+d_2A_{2n}+\ldots+d_iA_{in}+\ldots+d_nA_{nn} \end{pmatrix}.$$

Elementul de pe linia i ($i=1, 2, \ldots, n$) al vectorului coloană din membrul al doilea al relației este egal cu suma produselor dintre elementele vectorului D și complemenții algebrici ai liniei i din determinantul Δ al sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă regula lui Cramer pentru un sistem de ecuații liniare, cu determinantul diferit de zero : necunoscutele sînt date de relația

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1 \div n, \tag{2.5}$$

unde Δ_i este determinantul obținut din Δ prin înlocuirea coloanei de rang i prin vectorul termenilor liberi.

Cele două metode de rezolvare a sistemului (2.3) comportă aceleași calcule. Metoda matricei inverse este de preferat datorită unei scrieri mai concentrate.

Aplicație. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 \quad\quad + x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$$

Soluție. Matricea sistemului și matricea sa inversă sînt matricele din aplicația din § 1.4. Rezultă

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Soluțiile sistemului sînt $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ sau $X = (-2 \quad 1 \quad 3)^T$.

§ 2.3. SISTEME DE m ECUAȚII LINIARE CU n NECUNOSCUTE

1. **Teorema lui Kronecker.** Fie sistemul de m ecuații liniare cu n necunoscute

$$AX = D, \tag{2.6}$$

cu $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $X = (x_i)_{n \times 1}$, $D = (d_i)_{m \times 1}$. Fie rang $A = p$, $p \leqslant inf\ \{m, n\}$ și δ_p un determinant principal al sistemului.

Reamintim că se numesc *determinanți caracteristici* ai sistemului, determinanții de ordinul $p+1$ obținuți prin bordarea determinantului δ_p printr-o linie a matricei A și elementele corespunzătoare ale vectorului D al termenilor liberi, cît și teorema lui Rouché : *condiția necesară și suficientă ca un sistem de ecuații liniare să fie compatibil este ca toți determinanții caracteristici să fie nuli.*

Considerăm matricea $\tilde{A} = (A \mid D)$ obținută din matricea A a sistemului prin adăugarea vectorului D al termenilor liberi ; $\tilde{A}$ se numește *matricea prelungită* sau *matricea extinsă* a sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

Să arătăm că condiția ca toți determinanții caracteristici ai sistemului (2.6) să fie nuli, este echivalentă cu rang $\tilde{A}$ = rang A.

Să presupunem că toți determinanții caracteristici ai sistemului sînt nuli. Rezultă că în $\tilde{A}$ toți minorii de ordinul $p+1$ obținuți prin abordarea lui δ_p sînt nuli: cei obținuți prin bordarea lui δ_p cu coloane din A, deoarece rang $A=p$, cei obținuți prin bordarea cu elemente ale vectorului D, ca determinanți caracteristici.

Invers, dacă rang $\tilde{A}$ = rang A, toți minorii de ordinul $p+1$ ai matricei $\tilde{A}$ sînt nuli. Determinanții caracteristici ai sistemului făcînd parte din această categorie sînt toți egali cu zero.

Rezultă teorema lui Kronecker: *condiția necesară și suficientă ca un sistem de ecuații liniare să fie compatibil este ca rangul matricei extinse să fie egal cu rangul matricei sistemului.* Teorema lui Kronecker este exprimarea în limbajul matriceal a teoremei lui Rouché.

2. **Rezolvarea sistemelor de m ecuații liniare.** Presupunem că sistemul (2.6) este compatibil, adică

$$\text{rang } \tilde{A} = \text{rang } A = p \leqslant inf\ \{m,\ n\},$$

și că matricea B formată din primele p linii și coloane ale matricei A este nesingulară, adică det.B este un determinant principal al sistemului. Prin aceasta nu particularizăm problema, deoarece într-un sistem de ecuații putem schimba ordinea ecuațiilor și a necunoscutelor.

Prin intermediul lui B (sau det.B) ecuațiile sistemului se împart în două categorii: *ecuații principale* formate cu elemente din B și *ecuații secundare* care nu conțin elemente din B. În cazul nostru primele p ecuații sînt principale, celelalte $m-p$ sînt ecuații secundare.

La fel, primele p necunoscute sînt *necunoscute principale*, celelalte $n-p$, *necunoscute secundare*.

Păstrăm numai ecuațiile principale; matricea sistemului devine $(B \mid S)$, S fiind matricea formată cu coeficienții necunoscutelor secundare, $X = (X^B \mid X^S)^T$, unde X^B și X^S sînt respectiv vectorii coloană ai necunoscutelor principale și ai necunoscutelor secundare. Notînd cu D^B primele p linii din D, sistemul (2.6) devine

$$BX^B = D^B - SX^S$$

și înmulțind la stînga cu B^{-1}

$$X^B = B^{-1} D^B - (B^{-1} S) X^S, \tag{2.7}$$

necunoscutele principale fiind exprimate în funcție de necunoscutele secundare ale sistemului. Atribuind valori arbitrare necunoscutelor secundare obținem diferite soluții ale sistemului inițial.

Dacă rang $A=n$, toate necunoscutele sînt principale și sistemul (2.6) este compatibil determinat.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă rang $A<n$, există și necunoscute secundare și *sistemul este compatibil nedeterminat.*

Aplicație. Să se determine a astfel ca sistemul

$$\begin{cases} x_1+2x_2-\ 3x_3+\ x_4=1 \\ 3x_1+\ x_2+\ \ x_3-2x_4=3 \\ 3x_1-4x_2+11x_3-7x_4=a \end{cases}$$

să fie compatibil și apoi să se rezolve.

Soluție. Aplicăm teorema lui Kronecker. Matricea extinsă $\tilde{A}$ a sistemului conținînd în prima parte matricea A a sistemului, acționînd în determinarea rangului lui $\tilde{A}$ numai asupra coloanelor, se determină simultan și rangul lui A.

$$\tilde{A}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1 & -2 & 3\\ 3 & -4 & 11 & -7 & a\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 10 & -5 & 0\\ 0 & -10 & 20 & -10 & a-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-3\end{pmatrix}.$$

Rezultă rang $A=2$ și rang $\tilde{A}=2$ numai pentru $a=3$, valoare pentru care sistemul este compatibil nedeterminat, deoarece rangul matricei sistemului este mai mic decît numărul necunoscutelor. Pentru $a=3$, determinantul

$$\delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-5$$

este determinant principal al sistemului. Primele două ecuații și necunoscute sînt principale. Sistemul se poate scrie sub forma

$$\begin{cases} x_1+2x_2=1+3x_3-x_4 \\ 3x_1+\ x_2=3-\ x_3+2x_4 \end{cases}$$

și admite soluția

$$x_1=1-x_3+x_4, \qquad x_2=2x_3-x_4$$

sau

$$x_1=1-\lambda+\mu, \quad x_2=2\lambda-\mu, \quad x_3=\lambda, \quad x_4=\mu\ ;\ \lambda,\ \mu\in R.$$

Pentru $\lambda=\mu=1$ se obține soluția $x_1=x_2=x_3=x_4=1$.

§ 2.4. SISTEME LINIARE OMOGENE

Forma matriceală a unui sistem liniar și omogen de m ecuații cu n necunoscute este

$$AX=0, \tag{2.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $A=(a_{ij})_{m\times n}$. Deoarece rang A=rang $\tilde{A}$, un sistem de ecuații liniare și omogene este întotdeauna compatibil. El admite soluția $X=0$, adică toate variabilele nule.

Pentru ca *sistemul să admită și soluții nu toate nule*, el trebuie să fie compatibil nedeterminat, adică

$$\text{rang } A<n. \tag{2.9}$$

Dacă numărul de ecuații coincide cu numărul de necunoscute, $m=n$, matricea A trebuie să fie singulară și condiția anterioară devine

$$\det. A=0. \tag{2.10}$$

Pentru rezolvare, se păstrează ecuațiile principale și sistemul rămas este neomogen.

Aplicație. Să se determine λ astfel ca sistemul

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1 + x_2 + x_3=0\\ x_1+(1-\lambda)x_2 + x_3=0\\ x_1 + x_2+(1-\lambda)x_3=0,\end{cases}$$

să admită și soluții nu toate nule și să se rezolve în acest caz.

Soluție. Determinantul D al sistemului

$$D=-\lambda^2(\lambda-3)$$

se anulează pentru $\lambda_1=0$ și $\lambda_2=3$, valori pentru care sistemul admite și soluții nu toate nule.

Dacă $\lambda=0$ sistemul se reduce la ecuația

$$x_1+x_2+x_3=0$$

și soluția se poate scrie sub forma

$$x_1=\alpha,\quad x_2=\beta,\quad x_3=-(\alpha+\beta).$$

Dacă $\lambda=3$, considerînd primele două ecuații ca principale, sistemul devine

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=0\\ x_1-2x_2+x_3=0,\end{cases}$$

cu soluția $x_1=x_2=x_3$.

Aplicația 2. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z=0\\ A_2x+B_2y+C_2z=0.\end{cases}$$

Indicație. Presupunem că rangul matricei sistemului este doi; trecem pe z în membrul al doilea și rezolvăm sistemul. Soluția se poate scrie sub forma

$$\frac{x}{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{y}{-\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}.$$

3. ALGEBRĂ VECTORIALĂ

§ 3.1. SPAȚIUL VECTORIAL

1. **Definiție.** Am definit vectorii ca matrice particulare cu o singură linie sau coloană. Elementele unei astfel de matrice le numim *coordonatele* sau proiecțiile vectorului. Numărul de coordonate formează *dimensiunea* spațiului din care face parte vectorul. De exemplu $V=(3\ -1\ \ 0\ \ 2)$ este un vector linie din spațiul cu patru dimensiuni.

Vectorii la care ne vom referi în continuare sînt vectorii coloană. Din economie de spațiu vom nota vectorul coloană ca transpusul unui vector linie. De exemplu, $X=(x_1x_2\ldots x_n)^T$ este un vector coloană din spațiul cu n dimensiuni.

Vectorii dintr-un spațiu cu n dimensiuni sînt matrice de același tip. Operațiile de adunare și înmulțire a vectorilor cu un scalar se efectuează la fel ca la matrice și se bucură de aceleași proprietăți. Rezultă că mulțimea vectorilor cu n coordonate formează un *model de spațiu vectorial*; îl notăm cu R^n.

Dacă $X=(x_1x_2\ldots x_n)^T \in R^n$ și $Y=(y_1y_2\ldots y_n)^T \in R^n$, $X \geqslant Y \Leftrightarrow x_i \geqslant y_i$, $\forall i=1\div n$.

În particular $X \geqslant 0 \Leftrightarrow x_i \geqslant 0$, $\forall i=1\div n$.

Numim *sistem de vectori* în R^n un ansamblu de m vectori ai spațiului, $V_i=(v_{1i}v_{2i}\ldots v_{ni})^T$, $i=1\div m$. Matricea $A=(v_{ij})_{n\times m}$ sau $A=(V_1V_2\ldots V_m)$ avînd ca elemente ale coloanelor coordonatele vectorilor se numește *matrice a sistemului de vectori*, iar rangul ei, *rangul sistemului de vectori*.

Scanned with OKEN Scanner

§ 3.2. DEPENDENȚA LINIARĂ A VECTORILOR

Fie în R^n vectorii $V_i=(v_{1i}v_{2i}\ldots v_{ni})^T$, $i=1\div m$. Considerăm relația

$$\lambda_1V_1+\lambda_2V_2+\ldots+\lambda_mV_m=0, \tag{3.1}$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sînt scalari, iar 0 vectorul nul al spațiului R^n.

Vectorii V_i sînt *liniar independenți* dacă o relație de forma (3.1) există numai cînd $\lambda_i=0$, $\forall i=1\div m$. În caz contrar, adică dacă relația există și cînd nu toți λ_i sînt nuli, vectorii sînt *liniar dependenți*.

Din definiție rezultă că dacă vectorul nul face parte din sistem, vectorii sînt liniar dependenți și că sistemul format dintr-un singur vector nenul este liniar independent.

Dacă doi vectori $V_1\neq0$, $V_2\neq0$ sînt liniar dependenți, din $\lambda_1V_1+\lambda_2V_2=0$, cu $\lambda_1\neq0$, $\lambda_2\neq0$, rezultă $V_1=kV_2$, unde $k=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ este un scalar. Prin urmare, coordonatele a doi vectori liniar dependenți sînt proporționale.

Relația (3.1), prin înlocuirea coordonatelor vectorilor, devine

$$\begin{cases} v_{11}\lambda_1+v_{12}\lambda_2+\ldots+v_{1m}\lambda_m=0 \\ v_{21}\lambda_1+v_{22}\lambda_2+\ldots+v_{2m}\lambda_m=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{n1}\lambda_1+v_{n2}\lambda_2+\ldots+v_{nm}\lambda_m=0, \end{cases} \tag{3.2}$$

un sistem liniar și omogen de n ecuații cu m necunoscute $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, cu matricea

$$V=\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nm} \end{pmatrix}.$$

Dacă rang $V=m$, sistemul admite numai soluția $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0$ și vectorii sînt liniar independenți.

Reciproc, să presupunem că vectorii $V_1, V_2, \ldots, V_m$ sînt liniar independenți. Sistemul (3.2) admite numai soluția $\lambda_1=\lambda_2=\ldots\lambda_m=0$ și rang $V=m$.

Condiția necesară și suficientă ca un sistem de vectori să fie liniar independent este ca rangul matricei sistemului să fie egal cu numărul de vectori.

Deoarece rang $V\leqslant inf\ \{m, n\}$, rezultă că *într-un spațiu vectorial R^n există cel mult n vectori liniar independenți*, în sensul că vectorii unui sistem format dintr-un număr de vectori mai mare decît dimensiunea spațiului sînt liniar dependenți.

Să presupunem rang $V=p<m$. Orice subsistem de p vectori ai sistemului inițial, a cărui matrice are rangul p, este format din vectori liniar independenți. Sistemul (3.2) admite și soluții nu toate nule. Să presupunem că subsistemul

format din primii p vectori este liniar independent. Soluția sistemului se poate scrie sub forma

$$\begin{cases} \lambda_1=\alpha_{11}\lambda_{p+1}+\alpha_{12}\lambda_{p+2}+\ldots+\alpha_{1,\,m-p}\lambda_m \\ \lambda_2=\alpha_{21}\lambda_{p+1}+\alpha_{22}\lambda_{p+2}+\ldots+\alpha_{2,\,m-p}\lambda_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_p=\alpha_{p1}\lambda_{p+1}+\alpha_{p2}\lambda_{p+2}+\ldots+\alpha_{p,\,m-p}\lambda_m. \end{cases}$$

Dînd succesiv valoarea zero la cîte una, apoi două, trei, ..., $m-p-1$ din necunoscute, rezultă că toate subsistemele de $m-1$, $m-2$, ..., $p+1$ vectori ai sistemului inițial care conțin vectorii V_1, V_2, ..., V_p sînt formate din vectori liniar dependenți. Analog toate celelalte subsisteme formate din mai mult de p vectori sînt liniar dependente. Rezultă că *numărul maxim de vectori liniar independenți ai unui sistem de vectori este egal cu rangul sistemului de vectori.*

Aplicație. Să se arate că vectorii

$$V_1=(3\quad 0\quad -2\quad 3)^T,\quad V_2=(1\quad 2\quad 1\quad 2)^T,\quad V_3=(-3\quad 6\quad 7\quad 0)^T$$

sînt liniar dependenți. Să se determine relația dintre ei.

Soluție. Calculăm rangul matricei sistemului de vectori

$$V=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang $V=2$ mai mic decît numărul de vectori, deci vectorii sînt liniar dependenți. În calculul rangului nu am schimbat ordinea coloanelor, rezultă că primii doi vectori sînt liniar independenți.

Scriem sistemul

$$\lambda_1V_1+\lambda_2V_2+\lambda_3V_3=0,$$

numai pentru primele două coordonate, care intervin în ecuațiile principale.

$$\begin{cases} 3\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3=0 \\ 2\lambda_2+6\lambda_3=0. \end{cases}$$

Soluția $\lambda_1=2\lambda_3$, $\lambda_2=-3\lambda_3$ a sistemului înlocuită în relația dintre vectori conduce la

$$2V_1-3V_2+V_3=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 3.3. BAZĂ ÎN R^n. COORDONATELE UNUI VECTOR ÎNTR-O BAZĂ DATĂ

1. **Definiţie.** Numim *bază* a spaţiului vectorial R^n orice sistem de n vectori liniar independenţi ai spaţiului.

Pentru simplitatea exprimării şi a scrierii vom folosi aceeaşi notaţie pentru bază şi pentru matricea sistemului de vectori care o formează.

Considerăm vectorii $V_i=(a_{1i}a_{2i}\ldots a_{ni})^T$ şi presupunem că ei formează o bază în R^n pe care o notăm $B=(V_1V_2\ldots V_n)$. Vectorii V_i fiind liniar independenţi, matricea B este nesingulară.

Fie $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ un vector arbitrar al spaţiului. Sistemul de $n+1$ vectori (V_i, X), $i=1\div n$ este liniar dependent, deci există o relaţie de forma

$$\lambda_1V_1+\lambda_2V_2+\ldots+\lambda_nV_n+\lambda_{n+1}X=0,$$

cu nu toţi $\lambda_i=0$. Deoarece $\lambda_{n+1}\neq 0$— vectorii bazei fiind liniar independenţi — rezultă

$$X=-\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}V_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_{n+1}}V_2-\ldots-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}V_n,$$

o exprimare liniară a vectorului X în funcţie de vectorii bazei. Coeficienţii lui $V_1, V_2, \ldots, V_n$ se numesc *coordonatele* vectorului X în baza B. *Rezultă că, fiind dată o bază în R^n orice alt vector al spaţiului se exprimă liniar în funcţie de vectorii bazei.*

Dacă x_i^B, $i=1\div n$, sînt coordonatele vectorului X în baza B, avem

$$X=x_1^BV_1+x_2^BV_2+\ldots+x_n^BV_n=\sum_{i=1}^{n}x_i^BV_i. \tag{3.3}$$

Termenii $x_i^BV_i$ din (3.3) se numesc *componentele* vectorilor V_i în baza B. Componentele vectorilor sînt vectori, iar coordonatele lor scalari. Zicem că (3.3) reprezintă *expresia vectorului X în baza B.*

Notăm $X^B=(x_1^Bx_2^B\ldots x_n^B)^T$ şi relaţia (3.3) devine

$$X=BX^B \tag{3.4}$$

şi înmulţind la stînga cu B^{-1}

$$X^B=B^{-1}X, \tag{3.5}$$

formulă care ne permite să calculăm coordonatele unui vector într-o bază dată.

Observaţie. Fie $A=(a_{ij})_{m\times n}$ o matrice de rangul p şi $V_i\in R^m$ vectorii coloană din A. Dacă S este un sistem de p vectori liniar independenţi ai matricei, orice vector V_i se exprimă liniar în funcţie de vectorii S. Vom numi *bază* a unei matrice A orice sistem de p vectori liniar independenţi ai matricei. Dacă rang $A=m$, $p=m$ şi bazele matricei A sînt baze în R^m.

Scanned with OKEN Scanner

2. **Vectori unitari.** *Bază inițială.* În spațiul R^n considerăm vectorii

$$E_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\qquad E_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \ldots,\qquad E_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

vectori pe care-i numim *vectori unitari* ai spațiului. Matricea sistemului de vectori este matricea unitate, deci vectorii unitari formează o bază a spațiului ; o numim *bază inițială* a spațiului R^n. Denumirea este justificată de faptul că fiind dat un vector $X=(x_1x_2\ldots x_n)^T$

$$X=x_1E_1+x_2E_2+\ldots+x_nE_n,$$

și coordonatele lui sînt coordonatele în baza formată de vectorii E_i.

Din (3.5) rezultă că dacă un vector face parte dintr-o bază B, coordonatele lui în baza B formează un vector unitar.

3. **Soluții de bază ale unui sistem de ecuații liniare.** Considerăm sistemul compatibil

$$AX=D, \tag{3.6}$$

cu $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $n>m$. Presupunem că rang $A=m$, adică din sistem am eliminat ecuațiile secundare.

Notăm $A=(V_1V_2\ldots V_n)$, unde V_i sînt vectorii coloană ai matricei A aparținînd spațiului vectorial R^m. Sistemul (3.6) se poate scrie

$$x_1V_1+x_2V_2+\ldots+x_nV_n=D. \tag{3.7}$$

Un vector $\bar{X}=(\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_n)^T$ este soluție a sistemului dacă

$$\bar{x}_1V_1+\bar{x}_2V_2+\ldots+\bar{x}_nV_n=D.$$

Vectorul $\bar{X}$ este o *soluție de bază* a sistemului, dacă vectorii corespunzători coordonatelor lui nenule sînt liniar independenți. Deoarece $V_i\in R^m$, o soluție de bază are cel mult m coordonate diferite de zero. Dacă soluția de bază are m coordonate nenule, zicem că este *nedegenerată* ; în caz contrar, adică dacă are mai puțin de m coordonate nenule, zicem că ea este *degenerată*.

Avem o metodă simplă de determinare a soluțiilor de bază ale unui sistem. Dacă B este o bază a matricei A, deci a spațiului R^m, notînd cu S matricea formată cu vectorii care nu fac parte din bază, cu X^B variabilele principale sau bazice (însoțesc vectori din bază) și cu X^S vectorul variabilelor secundare sau nebazice, sistemului (3.6) se poate scrie sub forma

$$BX^B+SX^S=D$$

și înmulțind la stînga cu B^{-1}

$$X^B=B^{-1}D-(B^{-1}S)\,X^S,$$

Scanned with OKEN Scanner

care exprimă variabilele principale în funcție de variabilele secundare, în fond soluția sistemului. Pentru $X^S=0$, variabilele secundare sînt nule și obținem

$$X^B=B^{-1}D=D^B, \tag{3.8}$$

unde D^B sînt coordonatele vectorului D în baza B.

Soluția particulară obținută din D^B completat cu zerouri pentru variabilele secundare este o soluție de bază, vectorii din B fiind liniar independenți. O numim *soluție de bază corespunzătoare bazei* B. Ea este nedegenerată dacă toate coordonatele vectorului D^B sînt diferite de zero. În caz contrar ea este degenerată.

Rezultă că *fiecărei baze din matricea* A *îi corespunde o soluție de bază*. Numărul maxim de soluții de bază ale unui sistem este C_n^m. Numărul lor poate fi mai mic, deoarece în A pot exista sisteme de m vectori liniar dependenți.

Reciproca nu este adevărată, o soluție de bază putînd să corespundă mai multor baze. Dacă soluția de bază este degenerată, avînd $p<m$ coordonate nenule, cei p vectori liniar independenți corespunzători lor pot fi completați cu $m-p$ vectori din A, liniar independenți față de primii, astfel ca ei să formeze o bază, și aceasta în general, nu în mod unic.

Aplicație. Să se determine soluțiile de bază ale sistemului

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3+5x_4=4 \\ x_1+x_2-2x_3+2x_4=2. \end{cases}$$

Soluție. Determinăm bazele matricei

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

considerînd toate combinațiile de cîte doi vectori coloană. Anulăm pentru fiecare bază variabilele nebazice și rezolvăm sistemul ; obținem

$B_1=(V_1V_2)$, $\det.B_1=1\neq 0$, $\bar{X}_1=(2\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$

$B_2=(V_1V_3)$, $\det.B_2=0$, nu este bază

$B_3=(V_1V_4)$, $\det.\ B_3=-1\neq 0$, $\bar{X}_3=(2\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$

$B_4=(V_2V_3)$, $\det.\ B_4=2\neq 0$, $\bar{X}_4=(0\ \ 0\ \ -1\ \ 0)^T$

$B_5=(V_2V_4)$, $\det.\ B_5=-5\neq 0$, $\bar{X}_5=\left(0\ \ \frac{2}{3}\ \ 0\ \ \frac{2}{3}\right)^T$

$B_6=(V_3V_4)$, $\det.\ B_6=2\neq 0$, $\bar{X}_6=(0\ \ 0\ \ -1\ \ 0)^T$.

Din cele $C_4^2=6$ combinații V_iV_j posibile 5 formează baze. Dintre soluțiile de bază doar $\bar{X}_5$ este nedegenerată. Cele degenerate, egale două cîte două, corespund la cîte două baze distincte.

Să ne fixăm atenția asupra soluției $(0\ \ 0\ \ -1\ \ 0)^T$. Ea este de bază, deoarece are o singură coordonată nenulă x_3 și sistemul format de un singur vector este liniar independent. Vectorului V_3 îi putem atașa vectorii V_2 sau V_4 astfel ca să obținem o bază. Nu-i putem atașa vectorul V_1 pentru că $V_1=-\frac{1}{2}V_3$, adică cei doi vectori sînt liniar dependenți.

Scanned with OKEN Scanner

§ 3.4. SCHIMBAREA BAZEI

1. **Teoremă.** *Dacă X^A este expresia unui vector în baza A coordonatele lui în baza B sînt $X^B=(B^{-1}A)\,X^A$.*

Fie $X\in R^n$ şi X^A, X^B coordonatele lui X în bazele A şi B. Din (3.4) şi (3.5)

$$X=AX^A, \qquad X^B=B^{-1}X.$$

Rezultă

$$X^B=(B^{-1}A)\,X^A. \tag{3.9}$$

Apicaţie. Se consideră bazele

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

şi vectorul $V=(0 \quad 4 \quad -2)^T$.

a. Să se determine coordonatele vectorului V în baza A.

b. Din coordonatele lui V în baza A să se determine coordonatele lui V în baza B.

Soluţie. a. Aplicăm (3.5)

$$V^A=A^{-1}V=(-1 \quad 1 \quad 1)^T.$$

b. Aplicăm (3.6).

$$V^B=(B^{-1}A)\,V^A=(-2 \quad 6 \quad 10)^T.$$

Inversa matricei B s-a calculat la § (1.4).

2. Modificarea unui singur vector coloană din bază

Fie baza $B=(V_1V_2\ldots V_{h-1}V_hV_{h+1}\ldots V_n)\subset R^n$ şi vectorul $V_k\in R^n$ cu coordonatele, în baza B, a_{ik}, $i=1\div n$, necunoscute. În baza B înlocuim vectorul V_h prin vectorul V_k. Se obţine o nouă matrice B_1, care formează o bază dacă $a_{hk}\neq 0$. Zicem că vectorul V_h *iese* din bază şi vectorul V_k *intră* în bază.

Fie $X=(x_1^Bx_2^B\ldots x_n^B)^T\in R^n$ un vector cu coordonatele x_i^B în baza B cunoscute. Să calculăm coordonatele $x_i^{B_1}$ ale vectorului X în baza B_1. Din

$$V_k=\sum_{i\in B}a_{ik}V_i=\sum_{i\in B\setminus\{h\}}a_{ik}V_k+a_{hk}V_h, \tag{3.10}$$

unde prin notaţia abuzivă $i\in B$ înţelegem că i ia valorile corespunzătoare indicilor vectorilor din baza B, adică $i=1\div n$.

Scanned with OKEN Scanner

Din (3.10)

$$V_h = \frac{1}{a_{hk}} V_k - \frac{1}{a_{hk}} \sum_{i \in B \setminus \{h\}} a_{ik} V_k \tag{3.11}$$

şi înlocuind în

$$X = \sum_{i \in B} x_i^B V_i = \sum_{i \in B \setminus \{h\}} x_i^B V_i + x_h^B V_h,$$

se obţine

$$X = \frac{1}{a_{hk}} \sum_{i \in B_1} (x_i^B a_{hk} - x_h^B a_{ik}) V_i + \frac{x_h^B}{a_{hk}} V_k .$$

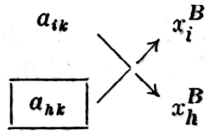
Coordonatele vectorului X în noua bază B_1 sînt

$$x_i^{B_1} = \begin{cases} \dfrac{x_h^B}{a_{hk}}, & \text{dacă } i = h \\ \dfrac{x_i^B a_{hk} - x_h^B a_{ik}}{a_{hk}}, & \text{dacă } i \neq h. \end{cases} \tag{3.12}$$

Formulele (3.12) se reţin uşor dacă formăm un tabel care să conţină pe coloane vectorii din baza B, coordonatele vectorului V_h care *iese* din bază, coordonatele vectorului V_k care *intră* în bază, coordonatele vectorului X, toate exprimate în baza B:

(3.13)

B	V_h	$V_k \downarrow$	X^B
V_1	0	a_{1k}	X_1^B
V_2	0	a_{2k}	X_2^B
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
V_i	0	a_{ik}	X_i^B
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$\leftarrow V_h$	1	$\boxed{a_{hk}}$	x_h^B
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
V_n	0	a_{nk}	X_n^B



Coordonata a_{hk} situată la intersecţia liniei h a vectorului V_h care iese din bază cu coloana vectorului V_k care intră în bază (indicaţi prin săgeţi) se numeşte *pivot* şi joacă un rol fundamental în transformarea coordonatelor vectorului X.

Scanned with OKEN Scanner

Formulele (3.12) se exprimă în următoare e reguli :

— coordonatele de pe linia pivotului se împart cu pivotul ;

— pentru determinarea coordonatei $x_i^{B_1}$ se formează un dreptunghi (din dreapta tabelului) din coordonate ale vectorilor V_k și X, avînd ca vîrfuri opuse pivotul și coordonata x_i^B ; noua coordonată $x_i^{B_1}$ se obține împărțind la pivot diferența dintre produsul coordonatelor de pe diagonala pivotului și produsul elementelor de pe cealaltă diagonală.

Al doilea procedeu se numește *regula dreptunghiului*. Se observă că ea este valabilă indiferent de ordinea coloanelor V_k și X și de ordinea pe linii a indicilor i și h.

Observații 1. Subliniem faptul că problema este posibilă numai dacă pivotul $a_{hk} \neq 0$. În caz contrar B_1 nu formează o bază.

2. Coordonatele vectorului V_h care iese din bază, în noua bază B_1, exprimate în (3.11), se obțin după aceeași regulă ca și coordonatele lui X în noua bază.

3. În noua bază B_1, $V_k \in B$ și se exprimă prin vectorul unitar V_h.

4. Dacă $x_h^B = 0$, atunci $x_i^{B_1} = x_i^B$, $\forall i = 1 \div n$, coordonatele unui vector rămîn neschimbate cînd coordonata corespunzătoare vectorului V_h care iese din bază este zero.

§ 3.5. FORMA REDUSĂ A UNEI MATRICE CORESPUNZĂTOARE UNEI BAZE

Fie matricea $A = (a_{ij})_{m \times n}$, rang $A = p$ și B o bază a ei. Exprimînd vectorii coloană V_i ai matricei în funcție de vectorii bazei obținem o nouă matrice A^B de același tip. Matricea A^B o numim *matricea redusă* a matricei A corespunzătoare bazei B.

Dacă $n > m$ și rang $A = m$, baza B a matricei A este bază a spațiului R^m și coloanele lui A^B sînt coordonatele vectorilor V_i în baza B dați de relația $B^{-1}V_i = V_i^B$ și

$$A^B = B^{-1}A. \tag{3.14}$$

Forma redusă a matricei conține o matrice unitate U_m formată din coloanele corespunzătoare vectorilor care formează baza B.

Dacă rang $A = p < m$, baza B a matricei A nu este bază a spațiului R^m, dar toți vectorii V_i se exprimă liniar în funcție de vectorii bazei B. Forma redusă A conține p vectori unitari și $m - p$ linii formate din zerouri.

În matricea A vectorii V_i fiind exprimați în baza inițială formată de vectorii unitari E_i, iar A^B în baza B, rezultă că putem aplica pentru determinarea formei reduse metoda schimbării unui singur vector din bază, eliminînd succesiv un vector E_h din bază și introducînd în bază un vector V_k.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru efectuarea calculelor aranjăm problema sub forma unui tabel care conține o coloană B cu vectorii care formează baza, matricea A și baza inițială :

(3.15)

B	$V_1 V_2 \ \dots \ V_k \ \dots \ V_n$	$E_1 \ E_2 \ \dots \ E_h \ \dots \ E_m$
E_1	$a_{11} a_{12} \ \dots \ a_{1k} \ \dots \ a_{1n}$	$1 \ 0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 0$
E_2	$a_{21} a_{22} \ \dots \ a_{2k} \ \dots \ a_{2n}$	$0 \ 1 \ \dots \ 0 \ \dots \ 0$
.	. . .	. . . . .
.	. . .	. . . . .
.	. . .	. . . . .
E_h	$a_{h1} a_{h2} \ \dots \ \boxed{a_{hk}} \ \dots \ a_{hn}$	$0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0$
.	. . .	. . . . .
.	. . .	. . . . .
.	. . .	. . . . .
E_m	$a_{m1} a_{m2} \ \dots \ a_{mk} \ \dots \ a_{mn}$	$0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 1$

Dacă E_h iese din bază și V_k intră în bază, pivotul este a_{hk}, $(a_{hk} \neq 0)$, și aplicăm formulele (3.12). Continuăm procedeul pînă la eliminarea tuturor vectorilor E_i din bază (rang $A = m$) sau pînă obținem un tabel în care eliminarea unui vector unitar din bază devine imposibilă deoarece toți pivoții sînt nuli, (rang $A < m$).

Procedeul folosit de modificarea succesivă a unui singur vector din bază, îl numim *metoda pivotului* datorită rolului important al elementelor a_{hk}, în transformarea tabelelor.

§ 3.6. APLICAȚII ALE METODEI PIVOTULUI ÎN ALGEBRĂ

1. Determinarea rangului unei matrice

În forma redusă a unei matrice $A = (a_{ij})_{m \times n}$ se poate „citi" rangul matricei și un determinant principal al ei. Deoarece vectorii bazei B în general nu sînt nominalizați, vom alege pivoții în așa fel încît să avem calcule cît mai puține, de preferință $+1$ sau -1.

Aplicație. Să se determine rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Formăm tabelul (3.15) și avem succesiv

B	V_1	V_2 ↓	V_3	V_4	E_1	E_2	E_3
←E_1	2	[1]	−3	0	1	0	0
E_2	1	3	1	−5	0	1	0
E_3	−1	0	2	−1	0	0	1
V_2	2 ↓	1	−3	0		0	0
E_2	−5	0	10	−5		1	0
←E_3	[−1]	0	2	−1		0	1
V_2	0	1	1	−2		0	
E_2	0	0	0	0		1	
V_1	1	0	−2	1		0	

Elementele liniei a doua fiind nule, rang $A=2$. Sistemul de vectori (V_2V_1) reprezintă o bază a matricei, iar

$$V_3=V_2-2V_1, \qquad V_4=-2V_2+V_1.$$

Observație. În rezolvarea problemei am folosit trei tabele succesive. Zicem că am rezolvat problema în două *iterații*.

2. **Determinarea matricei inverse.** Fie matricea nesingulară $A=(a_{ij})_n$. Aplicînd metoda pivotului, în ultimul tablou în locul matricei A apare forma ei redusă — o matrice formată din vectori unitari, iar în dreptul matricei unitate din primul tabel apare inversa bazei înscrisă în coloana B.

Aplicație. Să se calculeze inversa matricei

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie. Avem succesiv

B	V_1	V_2 ↓	V_3	E_1	E_2	E_3
← E_1	0	[−1]	2	1	0	0
E_2	1	0	−1	0	1	0
E_3	2	3	−4	0	0	1
V_2	0	1	−2	−1	0	0
← E_2	[1]	0	−1	0	1	0
E_3	2	0	2	3	0	1
V_2	0	1	−2 ↓	−1	0	0
V_1	1	0	−1	0	1	0
← E_3	0	0	[4]	3	−2	1
V_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	−1	$\frac{1}{2}$
V_1	1	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
V_3	0	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Matricea din ultimul tabel, situată în dreptul matricei unitate este inversa bazei $(V_2\ V_1\ V_3)$, inversa matricei $A=(V_1\ V_2\ V_3)$ se obţine schimbînd între ele primele două linii.

Observaţie. În primul pas, E_1 nu poate fi înlocuit în bază cu V_1 deoarece $a_{11}=0$.

3. **Rezolvarea unui sistem de n ecuaţii liniare cu n necunoscute.** Fie sistemul $AX=D$ cu matricea $A=(a_{ij})_n$ nesingulară. Soluţia sistemului

$$X=A^{-1}D=D^A, \tag{3.16}$$

reprezintă coordonatele vectorului D în baza A.

Pentru rezolvare prin metoda pivotului adăugăm tabelului (3.15) coloana vectorului D şi-i calculăm coordonatele în bazele succesive obţinute prin introducerea în bază a cîte unui vector din A.

Aplicaţie. Să se rezolve sistemul din aplicaţia de la § 2.2.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Avem succesiv

B	D	V_1 ↓	V_2	V_3	E_1	E_2	E_3
←E_1	−3	[1]	2	−1	1	0	0
E_2	−3	3	0	1	0	1	0
E_3	−5	2	2	−1	0	0	1
V_1	−3	1	2	−1		0	0
E_2	6	0	−6	4		1	0
←E_3	1	0	−2	[1]		0	1
V_1	−2	1	0	0		0	
←E_2	2	0	[2]	0		1	
V_3	1	0	−2	1		0	
V_1	−2	1	0	0			
V_2	1	0	1	0			
V_3	3	0	1	1			

Regăsim soluția din aplicația amintită.

4. Discuția și rezolvarea unui sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute. Fie sistemul

$$AX=D, \tag{3.17}$$

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ și rang $A=p\leqslant inf\ \{m, n\}$. Aplicînd metoda pivotului după introducerea în bază a p vectori V_i^* din A se obține forma redusă a matricei A corespunzătoare bazei B, formată din vectorii V_i^* ; ea conține $m-p$ linii formate din zerouri.

Dacă în ultimul tablou coordonatele lui D de pe liniile formate din zerouri sînt nule, rang $(A|D)$=rang $A=p$ și sistemul este compatibil. În caz contrar, dacă nu toate coordonatele lui D de pe aceste linii sînt nule, rang $(A|D)>$ $>$rang A și sistemul este incompatibil.

Dacă sistemul este compatibil prin eliminarea celor $m-p$ linii formate din zerouri se obține un sistem de forma (3.17) cu $A=(a_{ij})_{p\times n}$, rang $A=p$. Baza B a matricei A este bază în R^p și sistemul se poate scrie

$$BX^B=D-\sum_{j\in S}V_jx_j,$$

unde $j \in S$ înseamnă j ia valorile indicilor vectorilor care nu fac parte din bază. Înmulțind cu B^{-1} obținem

$$X^B = D^B - \sum_{j \in S} V_j^B x_j,$$

soluția sistemului dat. În coordonate formula se exprimă prin

$$x_i^B = d_i^B - \sum_{j \in S} a_{ij}^B x_j, \qquad i \in B. \tag{3.18}$$

Vectorii D^B și V_j^B fiind cuprinși în ultimul tabel obținut prin metoda pivotului, rezultă că soluția sistemului se poate citi direct din acesta, folosind formula (3.18).

Aplicație. Să se discute și să se rezolve sistemul din aplicația de la § 2.3.

Aplicînd metoda pivotului avem succesiv

B	D	V_1↓	V_2	V_3	V_4	E_1	E_2	E_3
←E_1	1	[1]	2	−3	1	1	0	0
E_2	3	3	1	1	−2	0	1	0
E_3	a	3	−4	11	−7	0	0	1
			↓					
V_1	1	1	2	−3	1		0	0
←E_2	0	0	[−5]	10	−5		1	0
E_3	$a-3$	0	−10	20	−10		0	1
V_1	1	1	0	1	−1			0
V_2	0	0	1	−2	1			0
E_3	$a-3$	0	0	0	0			1

Elementele liniei a 3-a din matricea A fiind nule, rang $A=2$, și sistemul este compatibil dacă $a-3=0$, adică $a=3$. Înmulțind vectorii V_i din ultimul tabel cu x_i și însumînd

$$\begin{aligned} x_1 \quad &+x_3-x_4=1 \\ &x_2-2x_3+x_4=0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1&=1-x_3+x_4 \\ x_2&=2x_3-x_4. \end{aligned}$$

Observație. Dacă matricea A conține h vectori unitari, se consideră numai $m-h$ vectori unitari E_i care împreună cu primii să formeze o bază inițială.

Scanned with OKEN Scanner

5. Determinarea soluţiilor de bază nenegative ale unui sistem de ecuaţii liniare. Fie sistemul $AX=0$, cu $A=(a_{ij})_{m\times n}$ şi rang $A=m$. Ne propunem să determinăm soluţiile de bază $\bar{X}^B\geqslant 0$.

Coordonatele $\bar{x}_i^B$ ale vectorului $\bar{X}^B$ sînt

$$\bar{x}_i^B=\begin{cases} d_i^B, & \text{dacă } i\in B \\ 0, & \text{dacă } i\notin B \end{cases}$$

şi $\bar{X}^B\geqslant 0 \Leftrightarrow D^B\geqslant 0$.

Presupunem $D\geqslant 0$ şi $D^B\geqslant 0$. Dacă vectorul V_k intră în bază şi V_h iese din bază se obţine o nouă bază B_1 şi din (3.12)

$$d_i^{B_1}=\begin{cases} \dfrac{d_h^B}{a_{hk}^B}, & \text{dacă } i=h \\ \dfrac{d_i^B a_{hk}^B-d_h^B a_{ik}^B}{a_{hk}^B}, & \text{dacă } i\neq h. \end{cases} \tag{3.19}$$

Condiţia $d_i^{B_1}\geqslant 0$, $\forall i\in B_1$ devine

$$a_{hk}^B>0, \qquad d_i^B a_{hk}^B-d_h^B a_{ik}^B\geqslant 0$$

şi este satisfăcută pentru

$$\frac{d_h^B}{a_{hk}^B}=\inf_{a_{hk}^B>0}\left\{\frac{d_i^B}{a_{ik}^B}\right\}, \quad \forall i\in B. \tag{3.20}$$

Rezultă că pentru a ne păstra în cadrul soluţiilor de bază nenegative trebuie respectat *criteriul de ieşire din bază*: dacă vectorul V_k intră în bază se scoate din bază vectorul pentru care este îndeplinită condiţia (3.20).

Dacă cea mai mică valoare a rapoartelor din (3.20) se realizează pentru doi indici p şi q se introduce în bază unul oricare din vectorii V_p sau V_q şi soluţia $\bar{X}^{B_1}$ este degenerată, deoarece $d_q^{B_1}=0$ sau $d_p^{B_1}=0$.

Dacă $\bar{X}^B\geqslant 0$ este o soluţie degenerată cu $d_h^B=0$, introducînd în bază orice vector $V_j\in B$ cu $a_{hj}^B\neq 0$, soluţia $\bar{X}^B$ nu se modifică.

Observaţie. Una din condiţiile care a condus la criteriul de ieşire din bază (3.20) este $a_{hk}^B>0$; pentru determinarea soluţiilor de bază nenegative se consideră pivoţii pozitivi. Singura excepţie este cea semnalată cînd soluţia $\bar{X}^B$ este degenerată.

Aplicaţie. Să se determine soluţiile de bază nenegative ale sistemului

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3+5x_4=4 \\ x_1+x_2-2x_3+2x_4=2. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Aranjăm problema în model în mod obișnuit și adăugăm o coloană a rapoartelor $\frac{d_i^B}{a_{ik}^B}$ pentru $a_{ik}^B > 0$. Pentru explicații numerotăm tabelele.

B	D	$V_1\downarrow$	V_2	V_3	V_4	E_1	E_2	$d_i^B : a_{ik}^B$	
$\leftarrow E_1$	4	$\boxed{2}$	1	-4	5	1	0	$\left\{\frac{4}{2}, \frac{2}{1}\right\}$	(I)
E_2	2	1	1	-2	2	0	1		
V_1	2	1	$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{5}{2}$		0	$\left\{\frac{2}{\frac{1}{2}}, \frac{0}{\frac{1}{2}}\right\}$	(II)
$\leftarrow E_2$	0	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$		$\frac{1}{2}$		1		
$\leftarrow V_1$	2	1	0	-2	$\boxed{3}$			$\left\{\frac{2}{3}\right\}$	(III)
V_2	0	0	1	0	-1				
V_4	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1				(IV)
V_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	0				

În (I) se pot introduce în bază vectorii V_1, V_2 sau V_4, dar nu V_3 care are toate coordonatele negative. Introducem în bază vectorul V_1. Rapoartele fiind egale se scoate din bază E_1 sau E_2.

În (II) soluția este degenerată. Se pot introduce în bază V_2 sau V_4 în locul vectorului E_2.

În (III) baza aparține matricei A ; eliminarea vectorului V_2 din bază nu modifică soluția. Dacă eliminăm vectorul V_1, singurul vector care poate fi introdus în bază este V_4, se obține ultimul tabel.

Soluțiile de bază nenegative sînt: $X_1=(2\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$ care corespunde bazelor (V_1V_2), (V_1V_4) și $X_2=\left(0\ \frac{2}{3}\ 0\ \frac{2}{3}\right)^T$, care corespunde bazei (V_2V_4).

În aplicația de la § 3.3 am determinat toate soluțiile sistemului dat prin rezolvare de sisteme de ecuații.

Scanned with OKEN Scanner

§ 3.7. SPAȚIUL EUCLIDIAN

1. Produsul scalar a doi vectori. Fie vectorii $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$, $Y=(y_1y_2,\ldots,y_n)^T$ din spațiul R^n. Definim produsul scalar al celor doi vectori, notat $X\cdot Y$, prin relația

$$X\cdot Y=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n. \tag{3.21}$$

Produsul scalar poate fi exprimat și sub forma

$$X\cdot Y=X^TY,$$

unde X^TY este elementul matricei (X^TY).

Din relația (3.21) rezultă ușor proprietățile produsului scalar :

$$\text{a. } X\cdot Y=Y\cdot X;$$

$$\text{b. } X\cdot(Y+Z)=X\cdot Y+X\cdot Z; \tag{3.22}$$

$$\text{c. } (\lambda X)\cdot Y=\lambda(X\cdot Y).$$

Pentru $Y=X$, (3.21) devine

$$X\cdot X=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2,$$

iar rădăcina sa pătrată

$$||X||=\sqrt{x_1^2+x_1^2+\ldots+x_n^2} \tag{3.23}$$

se numește *norma* sau *lungimea* vectorului.

Norma unui vector se bucură de următoarele proprietăți

$$\text{a. } ||X||=0, \text{ dacă } X=0,\ ||X||>0, \text{ dacă } X\neq 0;$$

$$\text{b. } ||\lambda X||=|\lambda|\,||X||; \tag{3.24}$$

$$\text{c. } ||X+Y||\leqslant||X||+||Y||.$$

Un spațiu vectorial R^n în care am definit produsul scalar a doi vectori, adică am introdus o metrică prin norma unui vector, se numește spațiu euclidian n-dimensional și-l notăm E^n.

Produsul scalar (3.21) este nul dacă unul dintre factori este nul sau dacă

$$x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n=0. \tag{3.25}$$

Dacă produsul scalar a doi vectori diferiți de vectorul zero este nul, vectorii sînt *ortogonali*.

2. Sisteme ortogonale de vectori. Să considerăm în E^n un sistem de m vectori $X_i=(x_{1i}x_{2i}\ldots x_{ni})^T$, $i=1\div m$. Dacă vectorii X_i sînt ortogonali doi cîte doi, zicem că sistemul de vectori este ortogonal.

Scanned with OKEN Scanner

Între vectorii sistemului există relația

$$X_i \cdot X_j = \|X_i\| \, \|X_j\| \, \delta_{ij}, \tag{3.26}$$

unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker.

Să considerăm o relație liniară între vectorii sistemului

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_m X_m = 0.$$

Înmulțind succesiv cu vectorii bazei și ținînd seamă de (3.26) și că $\|X_i\| > 0$, $\forall i = 1 \div m$ obținem $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$, adică vectorii sistemului sînt liniar independenți. Dacă $m = n$, ei formează o bază in E^n; *orice sistem de n-vectori ortogonali formează o bază în* R^n. *O numim bază ortogonală.*

Dacă considerăm versorii sistemului, fiecare vector al bazei are lungimea egală cu unitatea. Baza astfel obținută se numește *ortonormată*. De exemplu, baza inițială formată din vectorii unitari E_i este o bază ortonormată

Matricea unei baze ortonormate se numește matrice ortogonală. Într-o matrice ortogonală $A = (V_1 V_2 \ldots V_n)$, $V_i V_j = \delta_{ij}$ și

$$A A^T = A^T A = U_n, \tag{3.27}$$

adică, *inversa unei matrice ortogonale coincide cu transpusa sa.*

De asemenea, aplicînd relația (3.27) pentru determinanții matricelor rezultă

$$\det. A = \pm 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

4. FORME LINIARE. FORME PĂTRATICE

§ 4.1. TRANSFORMĂRI LINIARE

1. **Definiţie.** Numim formă liniară în R^n o expresie omogenă de gradul întîi în n variabile:

$$f=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n. \tag{4.1}$$

Vectorul $C=(c_1c_2\ldots c_n)^T$ se numeşte *vector al formei liniare.* Cu $X=(x_1x_2\ldots x_n)^T$ forma f devine

$$f=C\cdot X=C^TX, \tag{4.2}$$

f fiind elementul din matricea $(C^TX)_{1\times1}$.

Din (4.2) rezultă corespondenţa biunivocă dintre formele liniare în n variabile şi vectorii $C\in R^n$.

Numim sistem de forme liniare în R^n, ansamblul a m forme liniare în n variabile

$$f_i=c_{i1}x_1+c_{i2}x_2+\ldots+c_{in}x_n, \qquad i=1\div m,$$

matricea $C=(x_{ij})_{m\times n}$ se numeşte *matrice a sistemului de forme liniare*, iar rangul ei *rang al sistemului.*

Dacă $m=n$, sistemul de forme liniare se numeşte *transformare liniară.*

Fie transformarea liniară

$$\begin{cases} y_1=c_{11}x_1+c_{12}x_2+\ldots+x_{1n}x_n \\ y_2=c_{21}x_1+c_{22}x_2+\ldots+c_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n=c_{n1}x_1+c_{n2}x_2+\ldots+c_{nn}x_n. \end{cases} \tag{4.3}$$

Cu $C=(c_{ij})_n$, $Y=(y_1y_2\ldots y_n)^T$ transformarea (4.3) se poate scrie

$$Y=CX. \tag{4.4}$$

Matricea $C=(c_{ij})_n$ este *matricea transformării*, iar $\mu=\det.C$, *modulul* ei. Dacă matricea C este nesingulară, transformarea este *nedegenerată*, în caz contrar, rang $C<n$, transformarea este *degenerată*.

Ea transformă un vector $X\in R^n$ într-un vector $Y\in R^n$, deci reprezintă o transformare internă a spaţiului R^n.

În particular, dacă $C=U_m$, $Y=X$ şi transformarea este *identică*. Dacă C este o matrice scalară $Y=kX$ şi transformarea liniară este o *omotetie*.

2. Operaţii cu transformări liniare

a) *Suma* transformărilor liniare

$$Y=AX,\ Z=BX$$

este transformarea $V=(A+B)X$, care are ca matrice suma matricelor transformărilor date.

b) *Produsul* transformărilor liniare

$$Y=AX,\quad Z=BY$$

este o transformare care permite trecerea directă de la X la Z, adică aplicarea succesivă a celor două transformări.

Înlocuind pe Y din prima în a doua transformare rezultă

$$Z=(BA)X, \tag{4.5}$$

tot o transformare liniară, nedegenerată dacă transformările factori sînt nedegenerate.

c) *Transformarea inversă a unei transformări liniare.* Fie transformarea liniară nedegenerată $Y=CX$. Matricea C fiind nesingulară $\exists\, C^{-1}$ şi înmulţind la stînga cu C^{-1}

$$X=C^{-1}Y, \tag{4.6}$$

tot o transformare liniară, inversa transformării date. Prima transformă pe $X\in R^n$ în $Y\in R^n$, a doua pe Y în X.

3. **Transformări ortogonale.** Transformarea $Y=AX$ se numeşte *ortogonală* dacă matricea A este ortogonală. Inversa transformării, deoarece $A^{-1}=A^T$, este $X=A^TY$, tot o transformare ortogonală.

Fie X_1 şi X_2 doi vectori n-dimensionali şi respectiv $Y_1=AX_1$, $Y_2=AX_2$ vectorii obţinuţi aplicînd transformarea ortogonală $Y=AX$. Produsul scalar al vectorilor Y_1 şi Y_2 se poate scrie succesiv

$$Y_1\cdot Y_2=Y_1^TY_2=(AX_1)^TAX_2=X_1^T(A^TA)X_2=$$

$$=X_1^T(A^{-1}A)X_2=X_1^TX_2=X_1\cdot X_2,$$

adică, *produsul scalar a doi vectori este un invariant al transformărilor ortogonale.*

În particular, transformările ortogonale păstrează mărimile vectorilor și ortogonalitatea a doi vectori.

Exemplu. Transformarea

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta, \end{cases}$$

este o transformare ortogonală. Inversa ei este

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ y = -x'\sin\theta + y'\cos\theta, \end{cases}$$

tot o transformare ortogonală.

Din $(x')^2+(y')^2=x^2+y^2$, rezultă că mărimea vectorului $X'=(x'\ y')^T$ este egală cu mărimea vectorului $X=(x\ y)^T$.

Transformarea dată reprezintă o rotație de unghi θ a axelor de coordonate oxy din plan în jurul originii.

4. **Valori proprii ale unei matrice.** Considerăm transformarea liniară $Y=AX$ cu $A=(a_{ij})_n$. Punem condiția ca un vector X să fie paralel cu transformatul său Y, adică $Y=sX$, unde s este un scalar. Rezultă

$$sX=AX, \qquad (A-sU)\,X=0$$

sau

$$\text{(4.7)} \qquad \begin{cases} (a_{11}-s)\,x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+(a_{22}-s)\,x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+(a_{nn}-s)\,x_n=0, \end{cases}$$

un sistem liniar și omogen de n ecuații liniare cu n necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Condiția ca sistemul (4.7) să admită și soluții nu toate nule

$$\text{(4.8)} \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-s & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-s \end{vmatrix} = 0,$$

este o ecuație algebrică de gradul n în s; o numim *ecuație caracteristică* a transformării sau a matricei A, iar rădăcinile ei *valori proprii* ale matricei A. Rezultă că o matrice pătrată de ordinul n are n valori proprii (reale sau complexe).

Ecuația caracteristică se poate scrie sub forma

$$\text{(4.9)} \qquad x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0,$$

unde a_i este o sumă algebrică de determinanți minori de ordinul $n-i$ ai matricei A, iar $a_n=(-1)^n$ det. A. Rezultă că *numărul valorilor proprii diferite de zero ale unei matrice este egal cu rangul matricei.*

Scanned with OKEN Scanner

Se demonstrează că *dacă matricea A este simetrică toate valorile proprii sînt reale.*

Vectorii X_i, obținuți înlocuind succesiv pe s cu valorile proprii în sistemul (4.7) se numesc vectorii proprii ai matricei A.

Aplicație. Să se determine valorile proprii ale matricei

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 5 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 13 \end{pmatrix}.$$

Soluție. Ecuația caracteristică este

$$\begin{vmatrix} 5-s & 5 & 0 \\ 5 & 8-s & -3 \\ 0 & -3 & 13-s \end{vmatrix}=0.$$

Adunăm la elementele primei linii elementele celorlalte linii, scoatem factor comun pe $10-s$ etc. Se obține

$$(s-1)\ (s-10)\ (s-15)=0$$

și valorile proprii sînt $s_1=1$, $s_2=10$, $s_3=15$.

§ 4.2. FORME PĂTRATICE

1. Forma matriceală. Rangul unei forme pătratice. Se numește formă pătratică o expresie algebrică omogenă de gradul al doilea în variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$f=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\ldots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\ldots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n. \tag{4.10}$$

sau

$$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,\quad a_{ij}=a_{ji},\quad \forall i,j=1\div n. \tag{4.11}$$

Forma (1.10) se poate scrie

$$f=x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n)+$$
$$+x_2(a_{12}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n)+$$
$$+\ldots+x_n(a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\ldots+a_{nn}x_n).$$

Scanned with OKEN Scanner

Notăm

$$(4.12)\qquad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Obținem astfel o transformare liniară (4.12) cu matricea simetrică.

$$(4.13)\qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

formată cu coeficienții formei pătratice, o numim *matricea formei pătratice*, rangul ei, *rangul formei pătratice*, iar $\Delta = \det A$, *discriminantul* formei pătratice. Matricea A poate fi scrisă fără intermediul transformării (4.12); diagonala principală este formată din coeficienții termenilor pătratici, iar celelalte elemente situate deasupra diagonalei principale sînt semicoeficienții termenilor dreptunghiulari.

Dacă rang $A = n$, forma pătratică este *nedegenerată*, în caz contrar, rang $A < n$, forma pătratică este *degenerată*.

Notăm $X = (x_1\, x_2 \ldots x_n)^T$, $Y = (y_1 y_2 \ldots y_n)^T$. Transformarea liniară (4.12) se poate scrie $Y = AX$, iar forma pătratică (4.10)

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X \cdot Y = X^T Y$$

sau

$$(4.14)\qquad f = X^T A X,$$

forma matriceală a formei pătratice.

2. Aplicarea unei transformări liniare asupra variabilelor dintr-o formă pătratică. În (4.14) aplicăm transformarea liniară $X = BY$. Deoarece $X^T = (BY)^T = Y^T B^T$, forma pătratică devine

$$(4.15)\qquad f = Y^T (B^T A B)\, Y,$$

iar

$$(B^T A B)^T = B^T A^T\ (B^T)^T = B^T A B.$$

Rezultă că dacă asupra variabilelor dintr-o formă pătratică aplicăm o transformare liniară se obține o nouă formă pătratică ; matricea formei transformate este

$$(4.16)\qquad C = B^T A B,$$

unde B este matricea transformării liniare.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă B este nesingulară, rang (B^TAB)=rang A, adică *rangul unei forme pătratice nu se schimbă dacă asupra variabilelor aplicăm o transformare liniară nedegenerată.*

Notînd cu Δ, Δ', respectiv discriminanții formei pătratice date (4.14) și formei pătratice transformate (4.15) și cu μ modulul transformării liniare

$$\Delta'=\mu^2\Delta, \tag{4.17}$$

relație numită *teorema discriminantului*. Dacă transformarea liniară este unimodulară, $\Delta'=\Delta$.

Aplicație. Asupra formei pătratice

$$f=2x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3$$

se aplică transformarea liniară

$$\begin{cases} x_1=y_1-y_2+3y_3 \\ x_2=\quad y_2-2y_3 \\ x_3=\quad\quad y_3. \end{cases}$$

Să se scrie forma pătratică transformată.

Soluție. Avem

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

și

$$B^TAB=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Forma transformată este

$$f=2y_1^2+y_2^2+3y_3^2.$$

3. Forma canonică a unei forme pătratice

a. *Metoda lui Gauss.* Fie forma pătratică (4.10). Presupunem $a_{11}\neq 0$ și formăm un pătrat din termenii care conțin variabila x_1. Avem succesiv

$$f=\frac{1}{a_{11}}\left[a_{11}^2x_1^2+2a_{11}x_1\left(a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\right)\right]+\varphi_1,$$

$$f=\frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\right)^2+f_1, \tag{4.18}$$

unde f_1 este o formă pătratică în $n-1$ variabile.

Efectuînd transformarea liniară

$$(T_1)\quad \begin{cases} X_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_i = x_i, \quad \forall i = 2 \div n. \end{cases}$$

forma pătratică devine

$$(4.19)\quad f = \frac{1}{a_{11}} X_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots + 2a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n.$$

Presupunem $a_{22} \neq 0$ și procedăm în mod analog. Obținem

$$f = \frac{1}{a_{11}} X_1^2 + \frac{1}{a_{22}} (a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n)^2 + f_2,$$

unde f_2 este o formă liniară în $n-2$ variabile.

Efectuăm transformarea

$$(T_2)\quad \begin{cases} X_1 = X_1 \\ X_2 = a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \\ x_i = x_i, \quad \forall i = 3 \div n. \end{cases}$$

și forma pătratică devine

$$(4.20)\quad f = \frac{1}{a_{11}} X_1^2 + \frac{1}{a_{22}} X_2^2 + f_2.$$

Procedăm analog pentru forma f_2; obținem o sumă algebrică de trei pătrate și o formă f_3 cu $n-3$ variabile. Epuizînd toate variabilele obținem o sumă algebrică de cel mult n pătrate de forma

$$(4.21)\quad f = k_1X_1^2 + k_2X_2^2 + \ldots + k_nX_n^2.$$

Expresia (4.21), unde X_i sînt forme liniare în variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se numește *forma canonică* a formei pătratice. Metoda folosită, de a forma succesiv pătrate cu termenii care conțin o necunoscută, se numește *metoda lui Gauss* de aducere a unei forme pătratice la forma canonică.

Din procedeul folosit rezultă că forma canonică a unei forme pătratice nu este unică.

Observație. Am presupus inițial $a_{11} \neq 0$. În caz contrar, considerăm o altă necunoscută x_i pentru care $a_{ii} \neq 0$. Dacă forma pătratică nu conține termeni pătratici aplicăm transformarea liniară nedegenerată

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_i = y_i, \qquad i = 3 \div n \end{cases}$$

și procedeul poate fi aplicat.

Aplicație. Să se aducă la forma canonică forma pătratică

$$f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

Scanned with OKEN Scanner

Grupăm termenii în x_1 și avem succesiv

$$f=2[x_1^2+2(x_1-x_2)]+3x_2^2+9x_3^2,$$

$$f=2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2+7x_3^2+4x_2x_3,$$

$$f=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2+2x_3)^2+3x_3^2,$$

$$f=2X_1^2+X_2^2+3X_3^2.$$

b *Metoda transformărilor liniare.* Am adus forma pătratică (4.10) la forma canonică folosind metoda lui Gauss. Trecerea de la (4.18) la (4.19) s-a făcut prin transformarea liniară nedegenerată T_1, de la (4.19) la (4.20) prin transformarea liniară nedegenerată T_2 etc. Inversele T_i^{-1} ale transformărilor T_i sînt tot nedegenerate. Rezultă că forma pătratică a fost adusă la forma canonică prin aplicarea succesivă a transformărilor T_i^{-1}. Produsul unui număr finit de transformări liniare nedegenerate fiind o transformare de același gen, rezultă că *o formă pătratică poate fi adusă la forma canonică printr-o transformare liniară nedegenerată.*

Rangul formei pătratice fiind un invariant în aplicarea unei transformări liniare asupra variabilelor dintr-o formă pătratică, rangul formei (4.21) este egal cu rangul matricei A. Rezultă că, *numărul de pătrate din forma canonică a unei forme liniare este egal cu rangul ei.*

Se demonstrează că printr-o transformare liniară o formă pătratică poate fi adusă la forma canonică.

$$f=s_1X_1^2+s_2X_2^2+\ldots+s_mX_m^2, \tag{4.22}$$

unde s_i sînt valorile proprii ale matricei A.

De asemenea, folosind transformarea Jacobi, forma canonică a unei forme pătratice nedegenerate devine

$$f=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}X_1^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}X_2^2+\ldots+\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}X_n^2, \tag{4.23}$$

unde $\Delta_0=1$ și

$$\Delta_1=|a_{11}|,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n=\det A, \tag{4.24}$$

sînt *determinanții principali* ai matricei A.

Exemplu. În aducerea formei pătratice f din exemplul anterior la forma canonică am efectuat substituția

$$\begin{cases} X_1=x_1+x_2-x_3 \\ X_2=\quad x_2+2x_3 \\ X_3=\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=X_1-X_2+3X_3 \\ x_1=\quad X_2-2X_3 \\ x_3=\quad\quad X_3, \end{cases}$$

tocmai transformarea de la aplicația amintită, care aduce forma pătratică la forma canonică.

Scanned with OKEN Scanner

4. Forme pătratice pozitiv definite. Forma pătratică $f=X^TAX$ este *semipozitiv definită* dacă

$$X^TAX\geqslant 0, \qquad \forall X\in R^n \tag{4.25}$$

și *pozitiv definită*, dacă

$$X^TAX>0, \qquad \forall X\neq 0, \tag{4.26}$$

adică $X^TAX=0\Rightarrow X=0$.

Dacă forma pătratică este semipozitiv sau pozitiv definită, zicem că matricea A este semipozitiv sau pozitiv definită.

În mod analog se definesc formele liniare și matricele *seminegativ definite* și *negativ definite*.

De exemplu, forma pătratică din aplicațiile anterioare este pozitiv definită.

Forma pătratică

$$f=2x_1^2+4x_1x_2+x_2^2=2\,(x_1+x_2)^2-x_2^2$$

este *nedefinită*, semnul ei depinzînd de vectorul $X\in R^2$. Pentru $X=(0\ 1)^T\Rightarrow$ $\Rightarrow f>0$, iar pentru $X=(-2\ 4)^T\Rightarrow f<0$.

Din definiția formelor pătratice definite pozitiv (negativ) rezultă că în forma canonică

$$f=k_1X_1^2+k_2X_2^2+\ldots+k_pX_p^2, \qquad p\leqslant n$$

coeficienții k_i sînt pozitivi (negativi).

Din relația (4.26) se deduc proprietățile formelor pătratice pozitiv definite.

a. *O formă pătratică pozitiv* (negativ) *definită este nedegenerată.* Fie forma pătratică X^TAX semipozitiv definită și rang $A=p\leqslant n$. Ea se anulează pentru soluțiile sistemului liniar și omogen

$$X_i=0\ , \qquad i=1\div p, \tag{4.27}$$

obținut anulînd formele liniare din forma canonică. Forma pătratică este pozitiv definită dacă $X^TAX=0\Rightarrow X=0$. Sistemul (4.27) are numai soluția $X=0$, deci rang $A=n$.

b. *O formă pătratică este pozitiv definită dacă toate valorile proprii ale matricei ei sînt pozitive.* Proprietatea rezultă din (4.22).

c. *O formă pătratică este pozitiv definită dacă toți determinanții principali ai matricei ei sînt pozitivi.* Din (4.23) rezultă că forma pătratică este nedegenerată și coeficienții din forma canonică sînt toți pozitivi.

Observație. Pentru ca forma pătratică să fie *negativ definită*, coeficienții din (4.23) trebuie să fie negativi. Notînd

$$\Delta_i^*=(-1)^n\Delta_i, \qquad i=1\div n, \tag{4.28}$$

condiția este îndeplinită dacă $\Delta_i^*>0$, $\forall i=1\div n$, adică determinanții principali alternează ca semn, primul fiind negativ.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicație. 1. Să se arate că forma pătratică

$$f=x_1^2+5x_2^2+10x_3^2-4x_1x_2-6x_2x_3$$

este pozitiv definită.

Soluție. Matricea formei pătratice este

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$

și determinanții principali

$$\Delta_1=|1|=1 \quad , \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=1 \quad , \quad \Delta_3=\det.\ A=1$$

sînt pozitivi. Forma canonică este

$$f=X_1^2+X_2^2+X_3^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

II. NOŢIUNI DE GEOMETRIE ANALITICĂ

1. SPAŢIUL VECTORIAL

§ 1.1. MĂRIMI VECTORIALE. VECTORI

O mărime se numeşte *scalară* dacă ea este bine determinată printr-un număr **algebric**, rezultatul măsurătorii într-un anumit sistem de unităţi. De exemplu, temperatura este o mărime scalară.

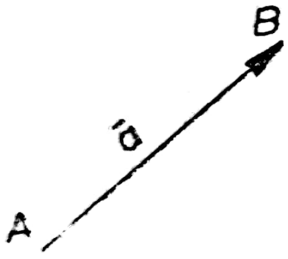


Fig. 1.1.

O mărime caracterizată printr-un scalar, o *direcţie* şi un *sens* se numeşte *mărime vectorială*. De exemplu, forţa este o mărime vectorială.

O astfel de mărime se poate reprezenta printr-un segment de dreaptă orientat (fig. 1.1), pe care-l numim *vector*. Notăm **a** sau **AB** şi citim „vectorul a sau AB".

Punctele A şi B se numesc extremităţile vectorului: A este *originea* şi B *extremitatea* vectorului. Mărimea vectorului o notăm prin $|\mathbf{a}|$ sau $|\mathbf{AB}|$ şi este mărimea segmentului **AB**. Direcţia vectorului este direcţia dreptei AB, numită *suport* al vectorului AB. Reamintim că toate dreptele paralele între ele au aceeaşi direcţie. Sensul vectorului **AB** este de la A spre B.

Un vector de mărime zero se numeşte *vector nul*, şi-l notăm $\mathbf{0}$. Direcţia vectorului nul este arbitrară.

§ 1.2. OPERAŢII CU VECTORI

1. **Egalitatea vectorilor.** Doi vectori a şi b sînt egali dacă au aceeaşi mărime, direcţie şi sens; notăm $\mathbf{a}=\mathbf{b}$. Doi vectori care au aceeaşi mărime şi direcţie, dar sensuri opuse se numesc *vectori opuşi*; notăm cu $-\mathbf{a}$ opusul vectorului a.

Scanned with OKEN Scanner

2. **Adunarea vectorilor.** Să considerăm vectorii **a**, **b**, **c**; așezăm vectorii astfel ca originea unui vector să coincidă cu extremitatea vectorului anterior (fig. 1.2)

Prin definiție, suma vectorilor **a**, **b**, **c**, este vectorul care închide linia poligonală formată de vectorii termeni. Notăm

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{s}. \tag{1.1}$$

Procedeul folosit se numește *regula poligonului*. Ea se menține pentru orice număr finit de vectori. În particular, pentru doi vectori, regăsim *regula paralelogramului* de compunere a două forțe.

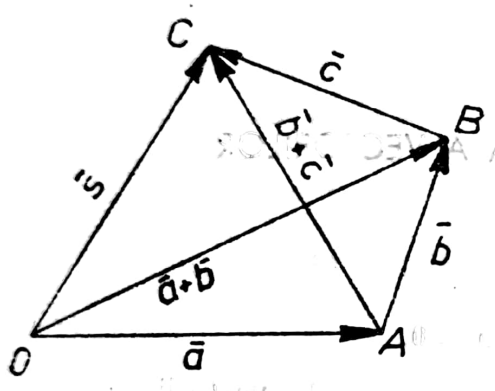


Fig. 1.2.

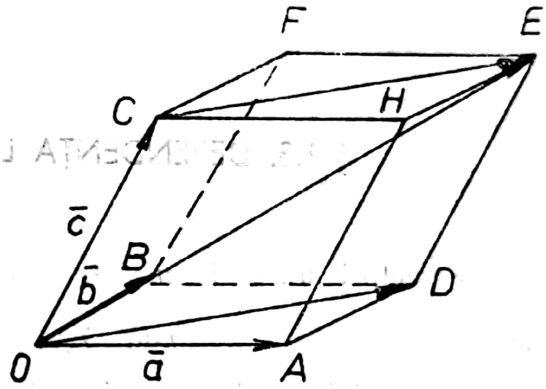


Fig. 1.3.

Pentru însumarea a trei vectori **a**, **b**, **c**, pe lîngă regula poligonului, putem folosi și *regula paralelipipedului*; așezăm vectorii cu originea în același punct și construim paralelipipedul care are muchiile $OA=\mathbf{a}$, $OB=\mathbf{b}$, $OC=\mathbf{c}$ (fig. 1.3). Din

$$OC+CE=OE,$$

rezultă

$$OA+OB+OC=OE,$$

adică suma celor trei vectori este *vectorul diagonal* al paralelipipedului.

Se verifică ușor că *vectorii formează un grup abelian față de operația de adunare*. De exemplu, asociativitatea se poate deduce din (fig. 1.2).

Diferența dintre vectorii **a** și **b** se definește ca operație inversă adunării, deci ca suma dintre vectorul **a** și opusul lui **b**

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b}). \tag{1.2}$$

Ea este vectorul de pe a doua diagonală a paralelogramului construit pe cei doi vectori ca laturi, sensul fiind de la extremitatea lui **b** spre extremitatea lui **a**.

3. **Înmulțirea unui vector cu un scalar.** Prin definiție, produsul $\lambda\mathbf{a}$ dintre scalarul λ și vectorul **a** este tot un vector, care are :

(1.3)
- mărimea egală cu $|\lambda|\cdot|\mathbf{a}|$,
- direcția vectorului **a**,
- sensul același cu **a**, dacă $\lambda>0$ și de sens contrar cu **a**, dacă $\lambda<0$.

Vectorul $-2\mathbf{a}$ este un vector care are ca mărime dublul mărimii lui $\mathbf{a}$, este paralel cu $\mathbf{a}$ și de sens contrar cu $\mathbf{a}$. Opusul unui vector este produsul vectorului prin -1.

Se verifică că produsul unui vector cu un scalar se bucură de proprietățile (I.§1.3). Rezultă că vectorii definiți ca segmente orientate formează un spațiu vectorial.

Versorul sau vectorul unitate al unui vector $\mathbf{a}$, notat cu $\mathbf{a}^0$ sau vers.$\mathbf{a}$, este

$$\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}, \tag{1.4}$$

adică vectorul raportat la mărimea sa.

§ 1.3. DEPENDENȚA LINIARĂ A VECTORILOR

Fie vectorii $\mathbf{a}_i$, $i=1\div n$ și relația liniară

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}. \tag{1.5}$$

Dacă relația (1.5) are loc numai pentru $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$, vectorii sînt liniar *independenți*, în caz contrar, dacă relația are loc și cînd nu toți λ_i sînt nuli, vectorii sînt *liniar dependenți*.

a. **Cazul dreptei.** Considerăm un vector $\mathbf{a}$ situat pe dreaptă. Orice alt vector $\mathbf{v}$ de pe dreaptă, avînd aceeași direcție cu $\mathbf{a}$, este produsul dintre $\mathbf{a}$ și un scalar, deci $\exists\lambda\neq0$ astfel ca

$$\mathbf{a}=\lambda\mathbf{v}, \tag{1.6}$$

adică vectorii $\mathbf{a}$ și $\mathbf{v}$ sînt liniar dependenți. Rezultă că *pe o dreaptă există un singur vector liniar independent*, în sensul că odată ales un vector, orice alt vector al dreptei este liniar dependent de $\mathbf{a}$.

b. **Cazul planului.** Fie $\mathbf{a}_1$ și $\mathbf{a}_2$ doi vectori liniar dependenți (nesituați pe aceeași dreaptă) și $\mathbf{v}=\mathbf{OV}$ un vector arbitrar din planul determinat de vectorii $\mathbf{a}_1$ și $\mathbf{a}_2$. Paralelele din V la vectorii $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ taie respectiv dreptele suport ale vectorilor $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ în A_1 și A_2 (fig. 1.4)

$$\mathbf{v}=\mathbf{OA}_1+\mathbf{OA}_2.$$

Zicem că am descompus vectorul $\mathbf{v}$ după direcțiile vectorilor $\mathbf{a}_1$ și $\mathbf{a}_2$; $\mathbf{OA}_1$ și $\mathbf{OA}_2$ sînt *componentele* vectorului $\mathbf{v}$.

Dar $\mathbf{OA}_1$, $\mathbf{OA}_2$ sînt liniar dependenți de $\mathbf{a}_1$ respectiv $\mathbf{a}_2$, deci $\exists\lambda_1,\ \lambda_2\neq0$, astfel încît

$$\mathbf{v}=\lambda_1\mathbf{a}_2+\lambda_2\mathbf{a}_2. \tag{1.7}$$

Rezultă că, *în plan există cel mult doi vectori liniar independenți*.

Scanned with OKEN Scanner

c. **Cazul spațiului.** Fie $\mathbf{OA}_i=\mathbf{a}_i$, $i=1, 2, 3$, trei vectori liniar independenți din spațiu (nesituați în același plan) și $\mathbf{OV}=\mathbf{v}$ un vector arbitrar. Paralela din V la OA_3 intersectează planul format de OA_1 și OA_2 în B (fig. 1.5). Din

$$\mathbf{OV}=\mathbf{OB}+\mathbf{BV}.$$

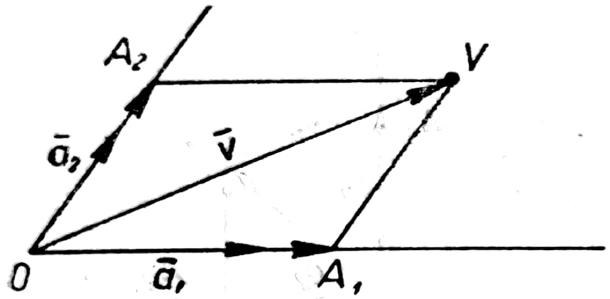


Fig. 1.4.

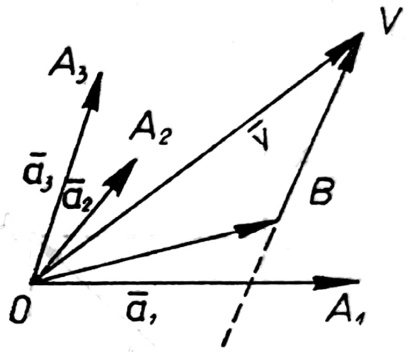


Fig. 1.5.

în baza relațiilor (1.6) și (1.7) rezultă că există trei scalari, nu toți nuli, astfel ca

$$\mathbf{v}=\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\lambda_3\mathbf{a}_3, \tag{1.8}$$

adică $\mathbf{v}$ este liniar dependent de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. *În spațiu există cel mult trei vectori liniar dependenți.*

§ 1.4. COORDONATE CARTEZIENE. EXPRESIA ANALITICĂ A UNUI VECTOR

a. **Cazul dreptei.** Considerăm o axă Ox și fie $\mathbf{e}_1$ versorul ei. Poziția unui punct M al dreptei este bine determinată dacă cunoaștem vectorul $\mathbf{OM}=\mathbf{r}$, cu originea în originea O a axei și extremitatea în punctul M. Îl numim *vector de poziție* al punctului M și notăm $M(\mathbf{r})$.

În baza relației (1.6)

$$\mathbf{r}=x_1\mathbf{e}_1. \tag{1.9}$$

Scalarul x_1 este *coordonata carteziană* sau *abscisa* punctului M. Notăm $M(x_1)$, adică punctul M de abscisă x_1.

b. **Cazul planului.** Considerăm un sistem de axe rectangulare Ox_1, Ox_2 și fie $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ respectiv versorii lor (fig. 1.6). Poziția punctului M din planul Ox_1x_2 este determinată prin vectorul său de poziție

$$\mathbf{OM}=\mathbf{r}.$$

În baza relațiilor (1.7) și (1.9)

$$\mathbf{r}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2. \tag{1.10}$$

Scalarii x_1, x_2 sînt coordonatele carteziene ale punctului M; x_1 este *absciso*, iar x_2 *ordonata* punctului M. Coordonatele x_1, x_2 sînt segmentele orientate OA_1 și OA_2, adică proiecțiile vectorului de poziție $\mathbf{OM}$ pe axele de coordonate, iar $\mathbf{OA}_1=x_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{OA}_2=x_2\mathbf{e}_2$ sînt componentele vectorului $\mathbf{OM}$ după direcțiile axelor.

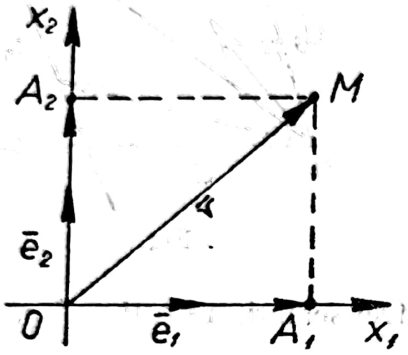


Fig. 1.6.

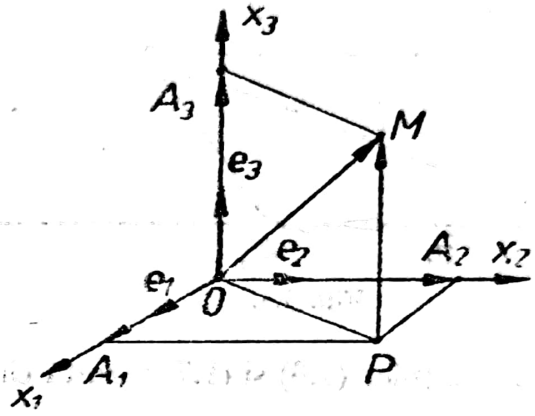


Fig. 1.7.

c. **Cazul spațiului.** Considerăm un sistem de axe Ox_1, Ox_2, Ox_3 ortogonale două cîte două și $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ respectiv versorii lor. Poziția punctului M este bine determinată de vectorul său de poziție $\mathbf{OM}=\mathbf{r}$. Din (1.8) rezultă

$$\mathbf{r}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3. \tag{1.11}$$

Scalarii x_1, x_2, x_3 sînt coordonatele carteziene ale punctului M, respectiv *abscisa*, *ordonata* și *cota* punctului M. Notăm $M(x_1, x_2, x_3)$.

Fie P proiecția punctului M pe planul de coordonate Ox_1x_2 și fie A_1, A_2 proiecțiile lui P pe axele Ox_1, Ox_2 (fig. 1.7). Deoarece MP este perpendiculară pe planul Ox_1x_2, $P\in Ox_1x_2$, iar PA_1 este perpendiculară pe Ox_1 conținută în planul Ox_1x_2, în baza teoremei celor trei perpendiculare, OA_1 este proiecția lui OM pe axa Ox_1. Analog $OM_2=\mathrm{pr}_{Ox_2}OM$. Notînd A_3 proiecția lui OM pe axa Ox_3, $\mathbf{OA}_3=\mathbf{PM}$ și

$$\mathbf{OM}=\mathbf{OA}_1+\mathbf{OA}_2+\mathbf{OA}_3. \tag{1.12}$$

Deci componentele vectorului pe cele trei axe de coordonate sînt $\mathbf{OA}_1=x_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{OA}_2=x_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{OA}_3=x_3\mathbf{e}_3$, iar *coordonatele punctului* M, segmentele orientate OA_1, OA_2, OA_3 *sînt proiecțiile vectorului de poziție pe axele de coordonate*.

d. **Expresia analitică a unui vector.** Fie vectorul $\mathbf{a}$ din spațiu și a_1, a_2, a_3 proiecțiile lui pe axele de coordonate. Considerăm vectorul $\mathbf{OM}=\mathbf{a}$. În baza relației (1.11)

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3. \tag{1.13}$$

Rezultă că orice vector din spațiu se poate exprima sub forma (1.13); o numim *expresia analitică* a vectorului $\mathbf{a}$. Scalarii a_1, a_2, a_3 sînt proiecțiile vectorului pe axele de coordonate, iar vectorii $a_1\mathbf{e}_1$, $a_2\mathbf{e}_2$, $a_3\mathbf{e}_3$ componentele vectorului după direcțiile celor trei axe.

Scanned with OKEN Scanner

§ 1.5. IZOMORFISMUL DINTRE SPAȚIILE VECTORIALE R^3 și V^3. GENERALIZAREA NOȚIUNII DE SPAȚIU

1. Să considerăm spațiul vectorial V^3 format din vectorii definiți ca segmente orientate și spațiul R^3 avînd ca elemente vectorii coloană 3×1. Fie $\mathbf{a}=\mathbf{OA}\in V^3$. Proiecțiile lui pe axe a_1, a_2, a_3 formează un triplet ordonat de numere, adică un vector $A=(a_1, a_2, a_3)^T\in R^3$. Prin proiecțiile vectorului pe axe am stabilit o *aplicație* a mulțimii V^3 în R^3 în care $\mathbf{a}\to A$.

Corespondența este biunivocă: vectorului $A=(a_1, a_2, a_3)^T$ îi corespunde în V^3 un singur punct $A(a_1, a_2, a_3)$, deci un singur vector $\mathbf{OA}=\mathbf{a}$ (vectorii considerați de noi sînt vectori liberi). Rezultă $\mathbf{a}\in V^3 \Leftrightarrow A\in R^3$.

Dacă $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ sînt doi vectori și d o axă

$$\mathrm{pr}_d(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathrm{pr}_d\,\mathbf{a}+\mathrm{pr}_d\,\mathbf{b},$$
$$\mathrm{pr}_d(\lambda\mathbf{a})=\lambda\mathrm{pr}_d\,\mathbf{a},$$

rezultă că dacă $\mathbf{a}\in V^3 \Leftrightarrow A\in R^3$ și $\mathbf{b}\in V^3 \Leftrightarrow B\in R^3$, atunci

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}\Leftrightarrow A+B,\qquad \lambda\mathbf{a}\Leftrightarrow\lambda A.$$

Elementele nule $\mathbf{0}\in V^3$ și $O\in R^3$ și elementele opuse $-\mathbf{a}$ și $-A$ se corespund reciproc.

Rezultă că cele două spații V^3 și R^3 sînt *izomorfe*. Izomorfismul spațiilor V^2, R^2 și V^1, R^1 se stabilește în același mod.

2. Rezultatele din § 1.4 cît și izomorfismul dintre spațiile vectoriale V^i definite geometric și spațiile vectoriale R^i definite algebric, pentru $i\leqslant 3$, impun o generalizare a spațiilor V^i pentru $i>3$.

Într-un spațiu vectorial n-dimensional V^n un punct A este determinat printr-un ansamblu ordonat de n numere $a_1, a_2, \ldots, a_n$, coordonatele lui carteziene, definite ca proiecțiile vectorului său de poziție $\mathbf{OA}$ pe n axe de coordonate $Ox_1, Ox_2, \ldots, Ox_n$ ortogonale două cîte două. Expresia analitică a unui vector din spațiul n-dimensional este

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+\ldots+a_n\mathbf{e}_n, \tag{1.14}$$

unde $\mathbf{e}_i$ este versorul axei Ox_i, a_i proiecția vectorului pe axa Ox_i, $a_i\mathbf{e}_i$ componenta vectorului după direcția axei Ox_i, $i=1\div n$.

Să considerăm un al doilea vector $\mathbf{b}\in V^n$ și fie

$$\mathbf{b}=b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2+\ldots+b_n\mathbf{e}_n,$$

expresia lui analitică.

Egalitatea vectorială $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ este echivalentă cu n egalități scalare $a_i=b_i$, $\forall i=1\div n$, iar

$$\begin{aligned}\mathbf{a}+\mathbf{b}&=(a_1+b_1)\,\mathbf{e}_1+(a_2+b_2)\,\mathbf{e}_2+\ldots+(a_n+b_n)\,\mathbf{e}_n,\\ \lambda\mathbf{a}&=\lambda a_1\mathbf{e}_1+\lambda a_2\mathbf{e}_2+\ldots+\lambda a_n\mathbf{e}_n,\\ \mathbf{a}-\mathbf{b}&=(a_1-b_1)\,\mathbf{e}_1+(a_2-b_2)\,\mathbf{e}_2+\ldots+(a_n-b_n)\,\mathbf{e}_n.\end{aligned} \tag{1.15}$$

Datorită izomorfismului celor două spații vectoriale, proiecțiile vectorului pe axe le numim și coordonatele vectorului. Vom folosi și notația $\mathbf{a}\{a_1a_2, \ldots, a_n\}$ adică vectorul $\mathbf{a}$ de coordonate $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Rezultă $\mathbf{a}+\mathbf{b}\{a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n\}$ etc.

2. SPAȚIUL EUCLIDIAN

§ 2.1. PRODUSUL SCALAR A DOI VECTORI

1. **Definiție.** Fie vectorii $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^n$. Prin definiție *produsul scalar* al vectorilor $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$, notat cu $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, este scalarul

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \tag{2.1}$$

Din figura 2.1 în care $\mathbf{OA}=\mathbf{a}$, $\mathbf{OB}=\mathbf{b}$ și A', B' sînt proiecțiile ortogonale ale punctelor A, B respectiv pe dreptele OA și OB rezultă

$$|\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a},$$

$$|\mathbf{b}| \cos(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}.$$

Relația de definiție a produsului scalar (2.1) devine

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}\, \mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = \mathbf{b}\, \mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a}, \tag{2.2}$$

adică, produsul scalar a doi vectori este egal cu *produsul dintre mărimea unui vector și proiecția celuilalt pe el.*

2. **Proprietățile produsului scalar** se deduc din (2.1).

a. Produsul scalar a doi vectori este comutativ deoarece

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{b}|\,|\mathbf{a}| \cos(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}.$$

b. Dacă λ este un scalar

$$\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}). \tag{2.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, din (2.1)

$$(\lambda \mathbf{a})\ \mathbf{b} = |\lambda|\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Dacă $\lambda > 0$ unghiurile $(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b})$ și $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ sînt egale și rezultă (2.3). Dacă $\lambda < 0$, $|\lambda| = -\lambda$, unghiul $(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \pi - (\mathbf{a}, \mathbf{b})$, iar $(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}) = \pi + (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ și relația (2.3) este verificată.

c. Distributivitatea produsului scalar

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \tag{2.4}$$

rezultă din proprietatea

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} + \mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{c}.$$

Înmulțim relația cu $|\mathbf{a}|$ și ținem seama de (2.2).

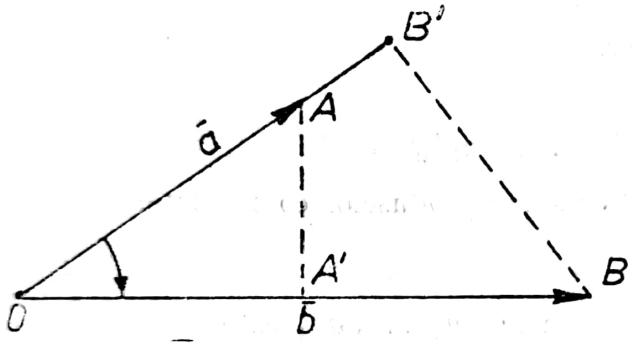


Fig. 2.1.

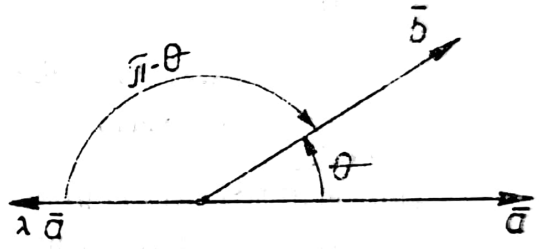


Fig. 2.2.

d. Din relația (2.1) produsul scalar a doi vectori este nul dacă $|\mathbf{a}| = 0$ sau $|\mathbf{b}| = 0$, adică unul dintre vectorii factori este nul, sau dacă $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, adică vectorii *sînt ortogonali.*

Invers, dacă vectorii sînt perpendiculari, $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ și $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

e. Produsul scalar al unui vector prin el însuși îl notăm cu a^2 și-l numim pătratul scalar al vectorului **a**. Notația este justificată de

$$a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 > 0, \tag{2.5}$$

adică *pătratul scalar al unui vector este egal cu pătratul mărimii vectorului.*

3. **Spațiul vectorial euclidian.** Numim spațiu vectorial euclidian E^n un spațiu vectorial V^n înzestrat cu operația de produs scalar al vectorilor, definită de (2.1).

Într-un spațiu E^n

— norma sau mărimea vectorului dedusă din (2.5) este

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a \cdot a}; \tag{2.6}$$

— unghiul a doi vectori **a**, **b** din (2.1) este dat de

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}; \tag{2.7}$$

— proiecția unui vector $\mathbf{a}$ pe vectorul $\mathbf{b}$, dedusă din (2.2) este

$$\text{pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}; \tag{2.8}$$

— doi vectori $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ sînt perpendiculari dacă $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$.

3. **Expresia analitică a produsului scalar.** Fie vectorii $\mathbf{a}, \mathbf{b}\in E^n$ și

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+\ldots+a_n\mathbf{e}_n$$

$$\mathbf{b}=b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2+\ldots+b_n\mathbf{e}_n.$$

Din proprietățile demonstrate rezultă că produsul $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ se poate efectua la fel ca produsul expresiilor algebrice, ținînd seamă că

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\delta_{ij},$$

unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker.

Rezultă că

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n. \tag{2.9}$$

Produsul scalar a doi vectori este egal cu suma produselor coordonatelor vectorilor factori.

Din relațiile (2.6)—(2.9) rezultă

— norma sau mărimea unui vector $\mathbf{a}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ este

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}; \tag{2.10}$$

— versorul $\mathbf{a}^0$ al vectorului $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a}^0=\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}}; \tag{2.11}$$

— unghiul vectorilor $\mathbf{a}=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $\mathbf{b}=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})=\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}}; \tag{2.12}$$

— proiecția vectorului $\mathbf{a}$ pe $\mathbf{b}$

$$\text{pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}}; \tag{2.13}$$

— condiția ca vectorii $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ să fie perpendiculari

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=0. \tag{2.14}$$

Aplicație. Să se deducă inegalitatea lui Cauchy-Schwarz

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2\leqslant\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. În baza relației (2.5)

$$(\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b})^2 \geqslant 0, \quad \forall \lambda \in R,$$

adică

$$\mathbf{a}^2 - 2\lambda \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \lambda \mathbf{b}^2 \geqslant 0.$$

Înlocuind $\lambda = \frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{b}^2}$ se obține inegalitatea din enunț.

Dacă

$$\mathbf{a}\ \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \qquad \mathbf{b}\ \{b_1, b_2, \ldots, b_n\},$$

inegalitatea devine

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)\,(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

§ 2.2. PRODUSUL VECTORIAL A DOI VECTORI

1. Produsul vectorial $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ a doi vectori **a** și **b** se definește ca un al treilea vector **c**, care are :

— mărimea dată de

(2.15) $$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b});$$

— direcția perpendicularei pe planul determinat de vectorii **a** și **b** ;

— sensul, astfel ca tripletul $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ să aibă orientarea tripletului versorilor $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ al axelor de coordonate.

Din expresia (2.15) rezultă că mărimea produsului vectorial se exprimă prin același scalar ca și aria paralelogramului construit pe vectorii **a** și **b**.

Din definiție rezultă că produsul vectorial a doi vectori este nul dacă unul dintre vectorii factori (**a** sau **b**) este nul sau dacă $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, adică cei doi vectori sînt paraleli. Invers, produsul vectorial a doi vectori paraleli este nul.

În particular, pentru versorii axelor de coordonate

(2.16) $$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = 0, \qquad \text{dacă } i = j,$$

iar produsele a doi versori diferiți sînt :

(2.17)
$$\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \qquad \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1$$
$$\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \qquad \mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2.$$

Din definiția produsului vectorial al vectorilor deducem proprietățile sale :

a. Produsul vectorial *este anticomutativ*, adică

(2.18) $$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Proprietatea rezultă din faptul că paralelogramele construite pe $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, și $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$ sînt aceleași, iar vectorul $-\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ este de sens contrar cu $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

b. Produsul vectorial este *asociativ față de înmulțirea cu un scalar*

$$\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b}). \tag{2.19}$$

Vectorii $\lambda\mathbf{a}$ și $\lambda\mathbf{b}$ fiind coliniari cu $\mathbf{a}$ respectiv $\mathbf{b}$, cele trei produse vectoriale au aceeași direcție, cea a perpendicularei pe planul determinat de $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$. Egalitatea mărimilor celor trei vectori rezultă din (2.15).

Dacă $\lambda>0$, cele trei produse au sensul vectorului $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, iar dacă $\lambda<0$ produsele au sensul lui $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$.

c. Produsul vectorial este *distribuitiv* la dreapta și la stînga, adică

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}, \tag{2.20}$$

$$\mathbf{c}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{b};$$

proprietatea se demonstrează efectuînd o proiecție pe un plan perpendicular pe $\mathbf{c}$, dus prin originea lui $\mathbf{c}$.

2. **Expresia analitică a produsului vectorial.** Fie vectorii $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}\in E^3$ dați de

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{b}=b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2+b_3\mathbf{e}_3.$$

Ținînd seamă de proprietățile produsului vectorial și de relațiile (2.16) și (2.17), rezultă

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\,\mathbf{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\,\mathbf{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\,\mathbf{e}_3$$

sau

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}. \tag{2.21}$$

Pe expresia analitică (2.21) a produsului vectorial se pot „citi" proprietățile acestuia ca și consecințe ale proprietăților determinanților.

Aplicație. Să se demonstreze identitatea lui Lagrange

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2+(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2.$$

Soluție.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\,\mathbf{b}),$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\,\mathbf{b}),$$

pătratul scalar al unui vector fiind egal cu pătratul mărimii lui

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2=|\mathbf{a}|^2\,|\mathbf{b}|^2\cos^2(\mathbf{a},\,\mathbf{b}),$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2=|\mathbf{a}|^2\,|\mathbf{b}|^2\sin^2(\mathbf{a},\,\mathbf{b})$$

și prin adunare rezultă identitatea din enunț.

Scanned with OKEN Scanner

În coordonate cu $\mathbf{a}\{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{b}\{b_1, b_2, b_3\}$ identitatea devine

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2=$$
$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\,(b_1^2+b_2^2+b_3^2).$$

3. **Produsul mixt a trei vectori.** Fie vectorii $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; produsul lor mixt este

$$(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}). \tag{2.22}$$

Să dăm o interpretare geometrică scalarului rezultat din (2.22). Construim pe $\mathbf{OA}=\mathbf{a}$, $\mathbf{OB}=\mathbf{b}$, $\mathbf{OC}=\mathbf{c}$ un paralelipiped (fig. 2.3). Produsul $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ este un vector perpendicular pe planul bazei OBC a paralelipipedului, iar mărimea lui este aria paralelogramului de bază $OBCD$. Din

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\operatorname{pra}_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}},$$

ultimul factor fiind egal cu înălțimea OA' a paralelipipedului, rezultă că produsul $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ este egal cu volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori.

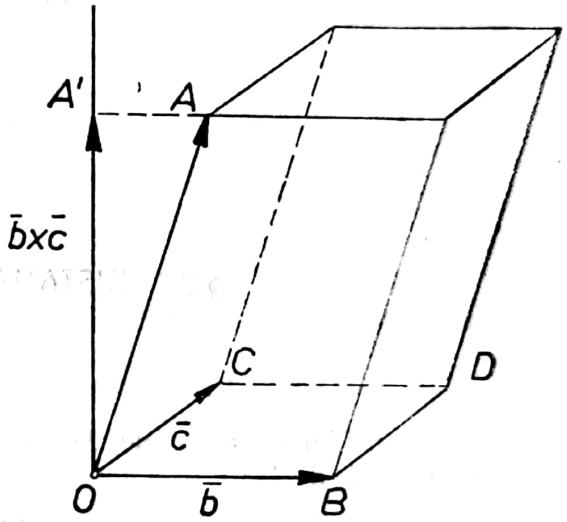


Fig. 2.3.

Dacă

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_2\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{b}=b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2+b_3\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{c}=c_1\mathbf{e}_1+c_2\mathbf{e}_2+c_3\mathbf{e}_3,$$

sînt expresiile analitice ale celor trei vectori

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3)\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

și ținînd seama de (2.16) și (2.17)

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}. \tag{2.23}$$

În particular, dacă vectorii $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sînt coplanari, $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=0$ și

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=0, \tag{2.24}$$

reprezintă condiția ca trei vectori să fie situați în același plan.

3. APLICAȚII ALE CALCULULUI VECTORIAL ÎN GEOMETRIE

§ 3.1. DISTANȚA ÎNTRE DOUĂ PUNCTE

Considerăm punctele $M_1(\mathbf{r}_1)$, $M_2(\mathbf{r}_2)$. Distanța între punctele M_1 și M_2 este dată de

$$|\mathbf{M_1M_2}| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|. \tag{3.1}$$

În spațiu, cu $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ și

$$|\mathbf{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{3.2}$$

În plan, cu $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$

$$|\mathbf{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{3.3}$$

Pe o dreaptă, cu $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$

$$M_1M_2 = |x_2 - x_1|. \tag{3.4}$$

Într-un spațiu n-dimensional, distanța între $M_1(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ și $M_2(x_1^2, x_2^2 \ldots, x_n^2)$ este

$$|\mathbf{M_1M_2}| = \sqrt{(x_1^2-x_1^1)^2+(x_2^2-x_2^1)^2+\ldots+(x_n^2-x_n^1)^2}. \tag{3.5}$$

În particular, distanța de la origine la punctul $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este

$$|\mathbf{OM}_1| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}. \tag{3.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicație. Să se verifice că triunghiul cu vîrfurile în punctele A (2, 1, 1), B (3, 0, 1), C (3, 1, 0) este echilateral.

Soluție. Punctele A, B, C fiind puncte din spațiu, aplicăm formula (3.1) și obținem

$$AB=BC=CA=\sqrt{2}.$$

§ 3.2. COORDONATELE UNUI PUNCT CARE ÎMPARTE UN SEGMENT ÎNTR-UN RAPORT DAT

Fie punctele M_1 ($\mathbf{r}_1$) și M_2 ($\mathbf{r}_2$) și punctul M ($\mathbf{r}$) care împarte segmentul M_1M_2 în raportul λ:

$$\frac{M_1M}{M_1M_2}=\lambda. \tag{3.7}$$

Deoarece $\lambda=0\Rightarrow M\equiv M_1$, $\lambda=1\Rightarrow M\equiv M_2$, punctele segmentului M_1M_2 se obțin pentru $\lambda\in[0, 1]$.

Vectorii $\mathbf{M_1M}$ și $\mathbf{M_1M_2}$ fiind coliniari și ținînd seama de (3.7)

$$\mathbf{M_1M}=\lambda\mathbf{M_1M_2}.$$

Exprimăm relația în vectorii de poziție ai punctelor

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_1=\lambda(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)$$

sau

$$\mathbf{r}=(1-\lambda)\,\mathbf{r}_1+\lambda\mathbf{r}_2. \tag{3.8}$$

În particular, pentru mijlocul segmentului $\lambda=\frac{1}{2}$ și

$$r=\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}. \tag{3.9}$$

În spațiu, cu $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ coordonatele punctului $M(x, y, z)$ care împarte segmentul M_1M_2 în raportul λ, deduse din egalarea coordonatelor vectorilor în (3.8) sînt

$$\begin{aligned} x&=(1-\lambda)\,x_1+\lambda x_2\\ y&=(1-\lambda)\,y_1+\lambda y_2\\ z&=(1-\lambda)\,z_1+\lambda z_2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Particularizarea pentru dreaptă și plan, cît și generalizarea pentru E^n sînt evidente; numărul de relații din (3.10) este egal cu dimensiunea spațiului.

Scanned with OKEN Scanner

Din (3.9) rezultă că coordonatele mijlocului unui segment sînt egale cu media aritmetică a coordonatelor extremităților segmentului.

Observație. Din (3.8) rezultă că dacă X_1, X_2 sînt doi vectori

$$X=(1-\lambda)\,X_1+\lambda X_2, \qquad \lambda\in[0;\,1], \tag{3.11}$$

reprezintă punctele segmentului X_1X_2.

Aplicație. Să se determine coordonatele centrului de greutate G al triunghiului $A_1A_2A_3$ cu $A_i=(x_1^i,\ x_2^i,\ \ldots,\ x_n^i)$, $i=1\div 3$.

Soluție. Notăm $A_i\,(\mathbf{r}_i)$, $i=1\div 3$. Centrul de greutate G se găsește pe mediana A_1A_1' pe care o împarte în raportul $\lambda=\frac{A_1G}{A_1A_1'}=\frac{2}{3}$. Notăm $G\,(\mathbf{r})$ și din (3.8) cu $A_1'\left(\frac{\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3}{2}\right)$, obținem

$$\mathbf{r}=\left(1-\frac{2}{3}\right)\mathbf{r}_1+\frac{2}{3}\cdot\frac{\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3}{2}=\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3}{3}.$$

Coordonatele $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ ale centrului de greutate G sînt

$$x_i=\frac{x_i^1+x_i^2+x_i^3}{3}, \qquad i=1\div n.$$

adică mediile aritmetice ale coordonatelor vîrfurilor triunghiului.

§ 3.3. ARIA UNUI TRIUNGHI

Considerăm triunghiul cu vîrfurile în punctele $A_i\,(\mathbf{r}_i)$, $i=1,\ 2,\ 3$ și vectorii $\mathbf{A_1A_2}$. $\mathbf{A_1A_3}$. Aria S a triunghiului $A_1A_2A_3$, jumătatea ariei paralelogramului construit pe vectorii $\mathbf{A_1A_2}$ și $\mathbf{A_1A_3}$, este

$$S=\frac{1}{2}\,|\,\mathbf{A_1A_2}\times\mathbf{A_1A_3}\,|,$$

sau

$$S=\frac{1}{2}\,|\,(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\times(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)\,|. \tag{3.12}$$

În planul xOy cu $M_i\,(x_i,\ y_i)$, $i=1,\ 2,\ 3$ din formula (2.21), considerînd cotele $z_i=0$ se obține

$$(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\times(\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1)=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0\end{vmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi

$$|(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\times(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)|=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rezultă aria S a triunghiului

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \tag{3.13}$$

expresia din membrul al doilea fiind considerată în modul, problema orientării ariilor depăşind nivelul propus în cadrul lucrării.

În particular, dacă punctele $A_i(x_i, y_i)$, $i=1, 2, 3$ sînt coliniare, $S=0$ şi

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{3.14}$$

§ 3.4. VOLUMUL TETRAEDRULUI

Considerăm $A_i(\mathbf{r}_i)$, $i=1\div4$ şi vectorii $\mathbf{A_1A_2}$, $\mathbf{A_1A_3}$, $\mathbf{A_1A_4}$. Volumul V al tetraedrului cu vîrfurile în punctele A_i este o treime din volumul prismei care are aceeaşi bază şi aceeaşi înălţime, deci a şasea parte din volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori ca muchii.

Din interpretarea geometrică a produsului mixt a trei vectori rezultă

$$V=\frac{1}{6}(\mathbf{A_1A_2}, \mathbf{A_1A_3}, \mathbf{A_1A_4})=\frac{1}{6}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4-\mathbf{r}_1).$$

În coordonate, cu $A_i(x_i, y_i, z_i)$ şi $i=1\div4$ din (2.23)

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix},$$

sau

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}. \tag{3.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă punctele A_i, $i=1\div4$ sînt coplanare, volumul tetraedrului este nul. Rezultă condiția ca patru puncte să fie situate în același plan.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.16}$$

Aplicație. Să se verifice că punctele $A\,(1, 1, 2)$, $B\,(-1, 0, -1)$, $C\,(1, 2, 1)$, $D\,(1, 3, 0)$ sînt coplanare.

Indicație. Se înlocuiesc coordonatele punctelor în determinantul din (3.16) și se verifică că este nul.

§ 3.5. DETERMINAREA UNEI DIRECȚII

Considerăm o dreaptă d din spațiu. Orice vector $\mathbf{a}$ paralel cu dreapta d determină direcția dreptei. Îl numim *vector director* al dreptei. Vectorul $\mathbf{a}$ fiind determinat prin cele trei coordonate ale sale $\mathbf{a}\{l_1, l_2, l_3\}$, direcția unei drepte în spațiu este determinată de un triplet ordonat de valori l_1, l_2, l_3, *parametri directori* ai dreptei.

Din interpretarea geometrică a coordonatelor unui vector, rezultă că parametri directori ai unei drepte sînt proiecțiile pe axele de coordonate ale unui vector care are aceeași direcție.

Fie $\{l_1^1, l_2^1, l_3^1\}$ și $\{l_1^2, l_2^2, l_3^2\}$ două sisteme de parametri directori ai aceleiași drepte. Din definiția parametrilor directori rezultă că există doi vectori paraleli $\mathbf{a}_1\,\{l_1^1, l_2^1, l_3^1\}$ și $\mathbf{a}_2\,\{l_1^2, l_2^2, l_3^2\}$. Din condiția de paralelism a vectorilor

$$\frac{l_1^1}{l_1^2} = \frac{l_2^1}{l_2^2} = \frac{l_3^1}{l_3^2}, \tag{3.17}$$

rezultă că, două sisteme de parametri directori ai aceleiași drepte sînt proporționale.

Dacă vectorul $\mathbf{a}$ este un versor, $|\mathbf{a}|=1$ și proiecțiile lui pe axe sînt cosinusurile unghiurilor α, β, γ formate de dreaptă cu axele Ox, Oy, Oz. Tripletul $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, formează un sistem particular de parametri directori; îi numim *cosinușii directori* ai dreptei. Din $|\mathbf{a}|=1$ rezultă

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

suma pătratelor cosinușilor directori ai unei drepte este egală cu 1.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\mathbf{a}\{l, m, n\}$ sînt parametri directori ai unei drepte

$$\cos\alpha = \frac{l}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

(3.18)
$$\cos\beta = \frac{m}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{n}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Relaţiile (3.18) dau proiecţiile pe axe ale vectorului $\mathbf{a}$.

Mai general, într-un spaţiu E^n, direcţia unei drepte este determinată de n parametri directori şi se păstrează proprietatea (3.17).

În particular, în plan direcţia unei drepte d este determinată de doi parametri directori l, m. Considerăm $\mathbf{OA}=\mathbf{a}$ şi notăm cu α unghiul format de dreaptă

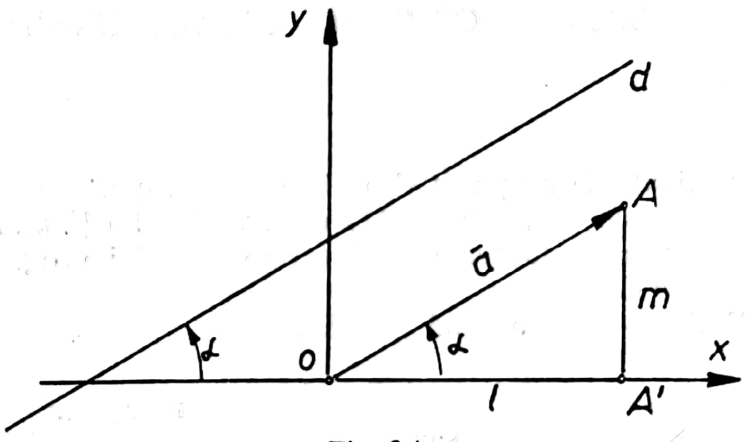


Fig. 3.1.

cu axa Ox şi cu A' proiecţia lui A pe axa Ox (fig. 3.1). Din definiţia parametrilor directori

$$l=OA', \qquad m=A'A$$

şi

(3.19)
$$k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{m}{l},$$

adică coeficientul unghiular sau panta dreptei este raportul dintre al doilea şi primul parametru director.

4. VARIETĂȚI LINIARE

§ 4.1. DIFERITE FORME ALE ECUAȚIEI DREPTEI

1. Dreapta determinată de un punct și o direcție. În raport cu sistemul de axe rectangulare $Oxyz$ considerăm punctul $M_0(\mathbf{r}_0)$ și vectorul $\mathbf{a}\{l, m, n\}$. Prin punctul M_0 trece o singură dreaptă d care are direcția vectorului $\mathbf{a}$ (fig. 4.1). Fie $M(\mathbf{r})$ un punct arbitrar pe d.

Vectorii $\mathbf{M_0M}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ și $\mathbf{a}$ fiind paraleli

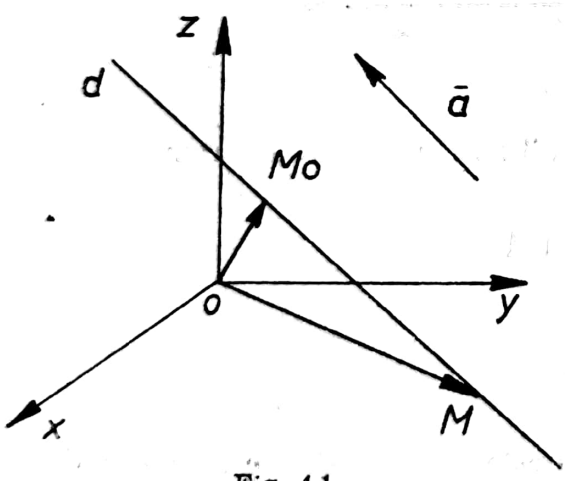


Fig. 4.1.

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=\lambda\mathbf{a}$$

sau

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\lambda\mathbf{a}. \tag{4.1}$$

Relația vectorială (4.1) reprezintă legătura dintre vectorul de poziție $\mathbf{r}$ al unui punct arbitrar al dreptei și datele problemei $\mathbf{r}_0$ și $\mathbf{a}$. Zicem că ea reprezintă ecuația vectorială a dreptei ce trece prin punctul $\mathbf{M_0}(\mathbf{r}_0)$ și are direcția vectorului $\mathbf{a}$.

Cu $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și $M(x, y, z)$, egalînd proiecțiile pe axe ale vectorilor $\mathbf{r}$ și $\mathbf{r}_0+\lambda\mathbf{a}$, din (4.1) rezultă

$$\begin{aligned} x&=x_0+\lambda l\\ y&=y_0+\lambda m\\ z&=z_0+\lambda n. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ecuațiile (4.2) le numim *ecuații parametrice* ale dreptei. Ele exprimă coordonatele unui punct oarecare al dreptei în funcție de parametrul λ.

Prin eliminarea lui λ din (4.2) obținem

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}, \tag{4.3}$$

ecuațiile canonice ale dreptei ce trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și are parametri directori l, m, n.

În particular, dacă dreapta este situată în planul Oxy, ecuația ei vectorială este tot (4.1), ecuațiile parametrice, primele două ecuații din (4.2), iar ecuația canonică

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}. \tag{4.4}$$

Înlocuind $\frac{m}{l}=k$, regăsim

$$y-y_0=k(x-x_0), \tag{4.5}$$

ecuația dreptei din plan ce trece prin $M_0(x_0, y_0)$ și are coeficientul unghiular k.

Mai general, dacă $M_0(\mathbf{r}_0)$ și $\mathbf{a}$ sînt respectiv un punct și un vector din spațiul n-dimensional, ecuația vectorială a dreptei ce trece prin M_0 și are direcția vectorului $\mathbf{a}$ este tot (4.1). Cu $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, $M(x_1, y_2, \ldots, x_n)$ și $\mathbf{a}\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ ecuațiile parametrice ale dreptei sînt

$$\begin{aligned} x_1&=x_1^0+\lambda l_1\\ x_2&=x_2^0+\lambda l_2\\ &\cdots\cdots\\ x_n&=x_n^0+\lambda l_n, \end{aligned} \tag{4.6}$$

iar ecuațiile canonice

$$\frac{x_1-x_1^0}{l_1}=\frac{x_2-x_2^0}{l_2}=\ldots=\frac{x_n-x_n^0}{l_n}. \tag{4.7}$$

2. **Dreapta determinată de două puncte.** Considerăm punctele $M_1(\mathbf{r}_1)$, $M_2(\mathbf{r}_2)$. Vectorul $\mathbf{M_1M_2}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ are direcția dreptei d determinată de punctele M_1 și M_2. Aplicăm (4.1) și obținem

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\lambda(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1), \tag{4.8}$$

ecuația vectorială a dreptei ce trece prin două puncte date.

În sistemul de axe $Oxyz$ din spațiu notăm $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ și $M(x, y, z)$. Ecuațiile parametrice ale dreptei sînt

$$\begin{aligned} x&=x_1+\lambda(x_2-x_1)\\ y&=y_1+\lambda(y_2-y_1)\\ z&=z_1+\lambda(z_2-z_1) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Scanned with OKEN Scanner

și eliminînd pe λ obținem

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \tag{4.10}$$

ecuațiile canonice ale dreptei ce trece prin două puncte.

În planul Oxy, cu $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M(x, y)$ ecuația vectorială a dreptei M_1M_2 este tot (4.8), ecuațiile parametrice, primele două ecuații din (4.9), iar ecuația canonică

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{4.11}$$

Ecuația (4.11) se mai poate scrie sub forma

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1), \tag{4.12}$$

punîndu-se în evidență coeficientul unghiular al dreptei ce trece prin două puncte

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \tag{4.13}$$

sau sub forma de determinant

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{4.14}$$

Toate ecuațiile dreptei în planul Oxy sînt liniare în x și y, de forma

$$Ax+By+C=0. \tag{4.15}$$

Invers, orice ecuație de forma (4.15) reprezintă o dreaptă din plan. Într-adevăr ecuația poate fi scrisă sub forma

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

și comparînd-o cu (3.16) rezultă că (4.15) reprezintă o dreaptă de coeficient unghiular

$$k=-\frac{A}{B}. \tag{4.16}$$

Într-un spațiu E^n, ecuația vectorială a dreptei determinată de punctele $M_1(\mathbf{r}_1)$ și $M_2(\mathbf{r}_2)$ este (4.8). Cu $M_1(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$, $M_2(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$ și $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ecuațiile canonice ale dreptei M_1M_2 sînt

$$\frac{x_1-x_1^1}{x_1^2-x_1^1}=\frac{x_2-x_2^1}{x_2^2-x_2^1}=\ldots=\frac{x_n-x_n^1}{x_n^2-x_n^1}. \tag{4.17}$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 4.2. ECUAȚIA PLANULUI

1. Planul determinat printr-un punct și direcția normalei. În raport cu sistemul de axe $Oxyz$ considerăm punctul $M_0(\mathbf{r}_0)$ și vectorul $\mathbf{n}$. Există un singur plan P care trece prin M_0 și este perpendicular pe $\mathbf{n}$. Fie $M(\mathbf{r})$ un punct arbitrar din plan. Vectorii $\mathbf{n}$ și $\mathbf{M_0M}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ fiind perpendiculari produsul lor scalar este nul. Rezultă

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0, \tag{4.18}$$

ecuația vectorială a planului ce trece prin $M_0(\mathbf{r}_0)$ și este perpendicular pe vectorul $\mathbf{n}$.

Notăm $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{n}\{A, B, C\}$, $M(x, y, z)$ și aplicăm (2.9). Ecuația (4.18) devine

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \tag{4.19}$$

ecuația planului ce trece prin punctul de coordonate (x_0, y_0, z_0) și este perpendicular pe dreapta de parametri directori A, B, C. O dreaptă perpendiculară pe plan o numim *normală* a planului; A, B, C sînt parametri directori ai normalei planului. Notînd constanta $Ax_0+By_0+Cz_0=-D$, ecuația (4.19) devine

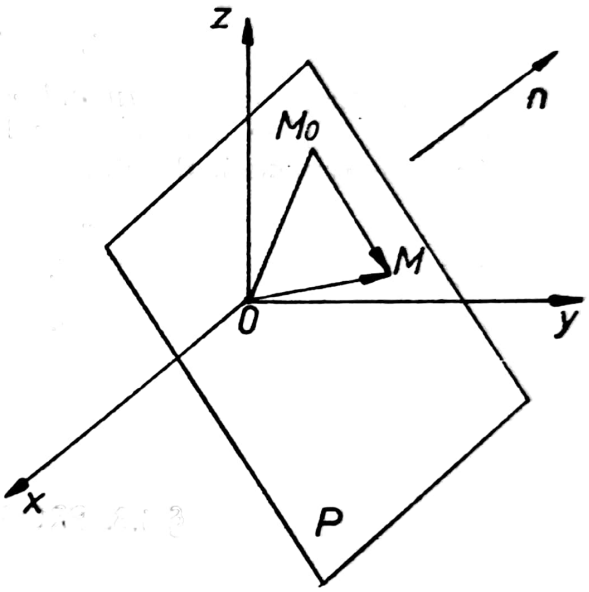


Fig. 4.2.

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{4.20}$$

ecuația generală a planului. Ecuația unui plan din spațiu este o ecuație liniară în trei variabile. În ecuația generală a planului coeficienții lui x, y, și z sînt parametri directori ai normalei planului.

În particular, ecuațiile planelor de coordonate sînt:

$$\begin{aligned} &z=0, \text{ ecuația planului } xOy,\\ &y=0, \text{ ecuația planului } xOz,\\ &x=0, \text{ ecuația planului } yOz. \end{aligned} \tag{4.21}$$

De asemenea $z=z_0$, $z_0=\text{const.}$, reprezintă ecuația unui plan paralel cu planul xOy la distanța z_0.

În E^n ecuația vectorială (4.18) reprezintă un *hiperplan*. Notînd coordonatele cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ecuația generală a unui hiperplan este

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n+a_{n+1}=0. \tag{4.22}$$

În particular

$$x_i=0, \qquad i=1\div n, \tag{4.23}$$

reprezintă ecuațiile hiperplanelor de coordonate.

Scanned with OKEN Scanner

Particularizînd, planele sînt hiperplanele spaţiului, iar dreptele hiperplanele planului.

Observaţie. Ecuaţiile planelor determinate prin alte condiţii decît cele considerate se obţin transpunînd în limbaj analic proprietăţile lor geometrice.

Astfel, *ecuaţia planului determinat de trei puncte* $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1, 2, 3$, se obţine aplicînd (3.16) pentru punctele coplanare M_1, M_2, M_3 şi $M(x, y, z)$, punctul arbitrar din plan. Se obţine

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.24}$$

Ecuaţia *planului determinat de punctul* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi direcţiile $\mathbf{a}_1\{l_1, m_1, n_1\}$, $\mathbf{a}_2\{l_2, m_2, n_2\}$ se obţine scriind că vectorii $\mathbf{M_0M}\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$, $\mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$ sînt coplanari. Rezultă

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.25}$$

§ 4.3. PROBLEME DE UNGHIURI

1. Unghiul a două drepte. Considerăm în spaţiu două drepte oarecare d_1 şi d_1 de direcţie dată : $d_1\{l_1, m_1, n_1\}$, $d_2\{l_2, m_2, n_2\}$. Unghiul θ al dreptelor d_1 şi d_2 este unghiul format de dreptele $\delta_1 \| d_1$, $\delta_2 \| d_2$ duse printr-un acelaşi punct. Din definiţia parametrilor directori ai unei drepte rezultă că $\exists\, \mathbf{a}_1\{l_1, m_1, n_1\} \subset \delta_1$ şi $\exists\, \mathbf{a}_2\{l_2, m_2, n_2\} \subset \delta_2$. Aplicăm (2.12) şi

$$\cos\theta = \frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \tag{4.26}$$

Din $\cos\theta=0$, obţinem condiţia de ortogonalitate a două drepte.

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0. \tag{4.27}$$

Dacă dreptele sînt paralele din (3.17)

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{4.28}$$

În plan $d_1\{l_1, m_1\}$, $d_2\{l_2, m_2\}$ şi (4.26) devine

$$\cos\theta = \frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2}}$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

și înlocuind $k_1 = \frac{m_1}{l_1}$, $k_2 = \frac{m_2}{l_2}$,

(4.29) $$\cos\theta = \frac{1+k_1k_2}{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+k_2^2}}.$$

Rezultă condiția de ortogonalitate a două drepte

(4.30) $$1+k_1k_2=0.$$

Observație. Din (4.29) calculînd pe tg α regăsim formula cunoscută a unghiului a două drepte.

2. **Unghiul unei drepte cu un plan.** Considerăm dreapta d și planul π. Fie A punctul de intersecție al dreptei cu planul, B un punct de pe dreaptă, B' proiecția lui pe planul π și n normala în A la planul π (fig. 4.3). Unghiul θ format de dreapta d cu proiecția sa pe plan AB' este unghiul dreptei cu planul π. Dreptele d, n și AB' fiind coplanare, unghiul normalei n cu dreapta d este complementul unghiului θ.

Cu $d\{l, m, n\}$ și $n\{A, B, C\}$, unghiul θ este dat de

$$\sin\theta = \frac{lA+mB+nC}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \quad (4.31)$$

În particular, dreapta d este paralelă cu planul π dacă $\sin\theta=0$, adică

(4.32) $$lA+mB+nC=0$$

și perpendiculară pe plan dacă

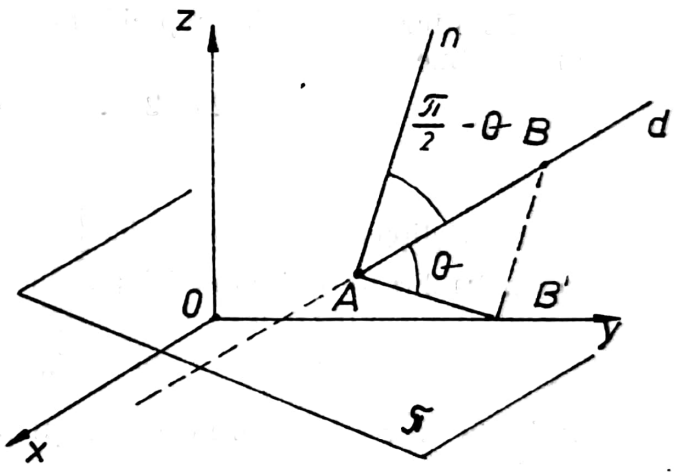


Fig. 4.3.

(4.33) $$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C},$$

condiție rezultată din paralelismul dreptelor d și n.

3. **Unghiul a două plane.** Fie planele π_1 și π_2 respectiv de ecuații

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Cele două plane formează un unghi diedru care se măsoară prin unghiul plan θ corespunzător format de două perpendiculare pe dreapta de intersecție a celor două plane, una cuprinsă în π_1, cealaltă în π_2. Unghiul normalelor celor două plane are laturile perpendiculare pe laturile unghiului θ, deci este egal cu acesta.

Parametri directori ai normalelor celor două plane sînt respectiv $\{A_1, B_1, C_1\}$, $\{A_2, B_2, C_2\}$ și

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{4.34}$$

Ca și în cazurile anterioare se obține condiția de ortogonalitate a două plane

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \tag{4.35}$$

și condiția de paralelism a planelor

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{4.36}$$

Aplicația 1. Să se determine unghiul format de dreapta

$$x + 2y + 2 = 0, \qquad x - z - 2 = 0,$$

cu planul

$$x - y - 1 = 0.$$

Soluție. Aducem ecuațiile dreptei la forma canonică egalînd valorile lui x obținute din ecuațiile ei

$$x = -2y - 2 = z + 2 \Rightarrow x = \frac{y+1}{-\frac{1}{2}} = z + 2.$$

Parametri directori ai dreptei sînt $\left\{1, -\frac{1}{2}, 1\right\}$ sau $\{2, -1, 2\}$. Din (4.31) cu parametri directori ai normalei $\{1, -1, 0\}$ se obține

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Aplicația 2. Să se determine unghiul planelor

$$x - y + 7 = 0, \qquad x + z - 6 = 0.$$

Indicație. Aplicăm (4.34) și obținem $\theta = \frac{\pi}{3}$.

§ 4.4. PROBLEME DE INTERSECȚIE

1. **Dreapta de intersecție a două plane.** Am văzut în § 4.1 și § 4.2 că o dreaptă în spațiu este determinată prin două ecuații liniare în x, y, z

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{4.37}$$

Scanned with OKEN Scanner

Fiecare ecuație în parte reprezintă un plan. Punctele ale căror coordonate verifică ambele ecuații sînt situate în ambele plane, deci pe dreapta lor de intersecție ; zicem că (4.37) reprezintă ecuațiile dreptei ca intersecție a două plane.

Să determinăm parametri directori $\{l, m, n\}$ ai dreptei (4.37). Normalele celor două plane sînt perpendiculare pe dreaptă, deci

$$\begin{cases} A_1 l + B_1 m + C_1 n = 0 \\ A_2 l + B_2 m + C_2 n = 0. \end{cases}$$

Soluția sistemului se poate scrie sub forma

$$\frac{l}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{m}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{n}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},$$

rezultă că parametri directori ai unei drepte dată ca intersecție a două plane sînt complementii algebrici ai elementelor din prima linie în determinantul simbolic

$$\begin{vmatrix} * & * & * \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

În E^n, din (4.7), rezultă că o dreaptă este determinată de $n-1$ hiperplane. Mai general, m hiperplane din R^n determină o varietate liniară cu $n-m$ dimensiuni. De exemplu, un plan din R^5 este determinat de trei ecuatii.

2. În general, problemele de intersecție dintre drepte, plane, hiperplane le reducem la discuția și rezolvarea unui sistem de ecuații liniare, coordonatele punctelor de intersecție fiind soluțiile sistemului format de ecuațiile lor. Pentru determinarea mai precisă a poziției relative dintre drepte și plane se folosesc și condițiile de paralelism și ortogonalitate din § 4.3 cît și cunoștințele de geometrie sintetică.

De exemplu, să determinăm condiția ca dreptele

$$A_i x + B_i y + C_i = 0, \qquad i = 1 \div 3 \tag{4.38}$$

să fie concurente.

Dreptele sînt concurente dacă se intersectează într-un singur punct, deci sistemul (4.38) trebuie să fie compatibil determinat, iar rangul matricei M a sistemului egal cu doi. Rezultă

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.39}$$

Dacă sistemul este compatibil și rang $M=1$ dreptele sînt confundate, iar dacă sistemul este incompatibil dreptele nu au nici un punct comun.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicaţie. Să se stabilească poziţia dintre dreptele

$$\frac{x-1}{2}=y=z-1, \qquad x=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{7}.$$

Indicaţie. Sistemul format de ecuaţiile dreptei este incompatibil şi parametri directori ai lor nu verifică condiţia de paralelism. Dreptele sînt oarecare.

§ 4.5. PROBLEME DE DISTANŢĂ

1. Ecuaţia normală a planului. Considerăm planul π şi fie P proiecţia originii în planul P (fig. 4.4). Notăm $|\mathbf{OP}|=p$ şi $\mathbf{n}=$vers. $\mathbf{OP}$, adică versorul normalei planului, şi $M(\mathbf{r})$ un punct arbitrar din planul π.

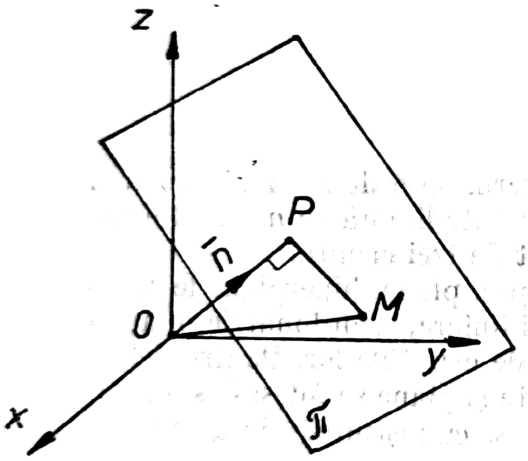


Fig. 4.4.

Din (2.2) $\mathbf{n}\cdot\mathbf{OM}=|n|\,\mathrm{pr}_{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{OM}=p$ sau

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-p=0. \tag{4.40}$$

Relaţia (4.40) exprimă o relaţie între vectorul de poziţie $\mathbf{r}$ al unui punct arbitrar din plan şi datele problemei $\mathbf{n}$ şi p ; o numim *ecuaţia normală* a planului.

Notăm cu $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ cosinuşii directori ai normalei planului şi cu x, y, z coordonatele punctului M, (4.40) devine

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. \tag{4.41}$$

Dacă

$$Ax+By+Cz+D=0$$

este ecuaţia unui plan, ecuaţia normală este

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0, \tag{4.42}$$

obţinută din aplicarea formulelor (3.18) pentru calcularea cosinuşilor directori în funcţie de parametri directori A, B, C.

În particular, ecuaţia normală sub formă vectorială a unei drepte din planul xOy este tot (4.40), iar în coordonate

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0. \tag{4.43}$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Distanţa de la un punct la un plan. Fie planul π de ecuaţie normală

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

şi punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Notăm cu d distanţa de la punctul M_0 la planul π. Dacă π' este planul care trece prin M_0 şi este paralel cu planul π, distanţa de la origine la planul π' este $p+d$. Normala n la planul π fiind şi normală a planului π', ecuaţia normală a acestuia este

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-(p+d)=0. \tag{4.44}$$

Punctul M_0 fiind situat în planul π', coordonatele lui verifică ecuaţia (4.44); rezultă

$$d=|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p|\,; \tag{4.45}$$

distanţa de la un punct la o dreaptă se obţine înlocuind coordonatele punctului în prima parte a ecuaţiei normale a planului.

În expresia (4.45) modulul apare ca o consecinţă a neorientării spaţiului.

În coordonate, distanţa de la punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul $Ax+By+Cz+D=0$ este

$$d=\frac{|Ax_0+By_0++Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{4.46}$$

În particular, distanţa de la punctul $A(x_0, y_0)$ la dreapta $Ax+By+C=0$ este

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{4.47}$$

iar generalizarea pentru hiperplan este imediată.

Aplicaţie. Să se determine distanţa dintre planele paralele

$$Ax+By+Cz+D_1=0, \qquad Ax+By+Cz+D_2=0.$$

Soluţie. Considerăm un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ în primul plan: $Ax_0+By_0+Cz_0+D_1=0$. Distanţa d între cele două plane este distanţa de la M_0 la cel de al doilea plan

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Observaţie. Distanţa de la un punct M_0 la dreapta d în spaţiu o calculăm reducînd problema la distanţa între două puncte. Determinăm coordonatele proiecţiei M a punctului M pe dreapta d intersectînd dreapta d cu planul dus prin M_0 perpendicular pe ea şi calculăm distanţa M_0M.

Aplicaţie. Să se determine distanţa de la punctul $A(1, 0, 2)$ la dreapta

$$x=z+1, \qquad y=z-1.$$

Soluţie. Ecuaţia planului care trece prin A şi este perpendicular pe dreaptă este

$$x+y+z-3=0.$$

Intersectăm dreapta cu planul şi obţinem A' (2, 0, 1). Distanţa de la punctul A la dreaptă este $AA'=\sqrt{2}$.

§ 4.6. FASCICUL DE DREPTE. FASCICUL DE PLANE

În planul Oxy considerăm dreptele concurente

$$d_1(x, y)\equiv A_1x+B_1y+C_1=0$$

$$d_2(x, y)\equiv A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Ecuaţia

4.48) $$d_1(x,\ y)+\lambda d_2(x,\ y)=0$$

cu λ un parametru real, reprezintă mulţimea dreptelor din plan care trec prin punctul de intersecţie al dreptelor date, fasciculul de drepte determinat de $d_1=0$ şi $d_2=0$.

Dreptele date — drepte fundamentale ale fasciculului — se obţin pentru valorile 0 şi ∞ ale parametrului λ.

În particular

$$A_1x+B_1y+C_1=\lambda$$

reprezintă fasciculul de drepte paralele cu dreapta $d_1=0$.

În spaţiu, ecuaţia

(4.49) $$d_1\,(x,\ y,\ z)+\lambda d_2\,(x,\ y,\ z)=0,$$

unde d_1 şi d_2 sînt expresii liniare în x, y, z, reprezintă un fascicul de plane, mulţimea planelor ce trec prin dreapta de intersecţie a planelor $d_1=0$ şi $d_2=0$, iar

$$d_1\,(x,\ y,\ z)=\lambda$$

asciculu 1 de plane paralele cu planul $d_1=0$.

Aplicaţie. Să se scrie ecuaţia planului determinat de dreapta

$$3x+y+z-4=0, \qquad 2x-y-z+1=0$$

şi punctul A (1, 1, 1).

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Ecuația tuturor planelor ce trec prin dreapta dată este

$$3x+y+z-4+\lambda(2x-y-z+1)=0.$$

Înlocuim coordonatele punctului A în ecuație. Se obține $\lambda=-1$ și planul

$$x+2y+2z-5=0.$$

§ 4.7. SEMISPAȚII

Fie planul π de ecuație

$$P(x, y, z)\equiv Ax+By+Cz+D=0$$

și punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nesituate în plan. Dreapta M_1M_2 intersectează planul în punctul M. Cu $\frac{M_1M}{M_1M_2}=\lambda$, coordonatele punctului M sînt

$$(1-\lambda)x_1+\lambda x_2,\ (1-\lambda)y_1+\lambda y_2,\ (1-\lambda)z_1+\lambda z_2.$$

Punctul M fiind situat în planul π coordonatele lui verifică ecuația planului. Înlocuim în ecuația planului și obținem

$$\frac{\lambda}{1-\lambda}=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}=-\frac{P(x_1, y_1, z_1)}{P(x_2, y_2, z_2)}.$$

Dacă $\lambda\in(0, 1)$, M este situat între M_1 și M_2. Punctele M_1 și M_2 sînt de părți diferite ale planului și $P(x_1, y_1, z_1)$, $P(x_2, y_2, z_2)$ sînt de semne contrare.

Dacă $\lambda\notin(0, 1)$ punctele M_1 și M_2 sînt de aceeași parte a planului și $P(x_1, y_1, z_1)$, $P(x_2, y_2, z_2)$ sînt de același semn.

Rezultă că planul împarte spațiul R^3 în două semispații: semispațiul R^3_+

$$Ax+By+Cz+D>0 \tag{4.50}$$

și semispațiul R^3_-

$$Ax+By+Cz+D<0. \tag{4.51}$$

Dacă inecuațiile sînt verificate pentru „$\geqslant$“ sau „$\leqslant$“, semispațiile sînt închise.

Mai general, un hiperplan împarte spațiul R^n în două semispații; dreapta împarte planul în două semiplane.

5. CERCUL ŞI SFERA

§ 5.1. ECUAŢIA SFEREI

1. Sfera este definită ca mulţimea punctelor din spaţiu egal depărtate de un punct fix. Distanţa constantă este raza sferei, iar punctul fix, centrul ei. Considerăm ca centru punctul $C(\mathbf{r}_c)$ şi notăm raza cu R. Cu $M(\mathbf{r})$, din definiţie obţinem

$$|\mathbf{CM}|=R, \qquad |\mathbf{r}-\mathbf{r}_c|=R$$

sau

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_c)^2=R^2, \tag{5.1}$$

ecuaţia vectorială a sferei.

Notăm $C(a, b, c)$, $M(x, y, z)$ şi (5.1) devine

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2, \tag{5.2}$$

ecuaţia carteziană a sferei.

Punctele pentru care

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2<0$$

sînt interioare sferei, iar punctele pentru care

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2>0$$

sînt exterioare sferei.

În particular, ecuaţia sferei cu centrul în origine este

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{5.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația (5.2) este de forma

$$x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\delta z+\delta=0, \tag{5.4}$$

o ecuație de gradul doi în x, y, z caracterizată prin grupul termenilor de gradul doi $x^2+y^2+z^2$

În planul Oxy, cercul se definește la fel ca sfera în spațiu. Ecuația vectorială a cercului în plan este (5.1), iar în coordonate

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Într-un spațiu cu n dimensiuni, locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix se numește *hipersferă*. Ecuația vectorială este tot (5.1), iar ecuația în coordonate

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2=R^2. \tag{5.5}$$

Prin particularizare, sfera este hipersfera spațiului cu trei dimensiuni iar cercul hipersfera din plan.

2. **Determinarea centrului și a razei.** Fie sfera de ecuație (5.4). Să-i determinăm centrul și raza

Identificăm (5.4) cu (5.2). Din

$$\alpha=-2a,\quad \beta=-2b,\quad \gamma=-2c,\quad \delta=a^2+b^2+c^2-R^2$$

rezultă

$$a=-\frac{\alpha}{2},\quad b=-\frac{\beta}{2},\quad c=-\frac{\gamma}{2}, \tag{5.6}$$

$$R^2=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\delta}{4}. \tag{5.7}$$

Sfera este reală, imaginară sau se reduce la un punct dacă numărătorul expresiei lui R^2 din (5.7) este respectiv mai mare, mai mic sau egal cu zero.

Aplicație. Să se determine centrul și raza sferei

$$4x^2+4y^2+4z^2-4x-24z+53=0.$$

Indicație. Să aplicăm formulele (5.5) și (5.6) și se obține $C\left(\frac{1}{2}, 0, 3\right)$ și $R^2=-4$. Ecuația reprezintă o sferă imaginară cu centrul în punctul real C.

§ 5.2. CERCUL ÎN SPAȚIU

În spațiu, cercul se obține intersectînd o sferă cu un plan. Ecuațiile cercului sînt

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2\\ Ax+By+Cz+D=0.\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Elementele cercului se pot obține din considerente de geometrie sintetică. Centrul cercului este proiecția C' a centrului sferei pe planul cercului, iar raza r din relația

$$r^2=R^2-d^2,$$

unde d este distanța de la centrul sferei la plan.

Dacă $R^2-d^2>0$ cercul este real, dacă $R^2-d^2=0$ cercul se reduce la un punct, planul fiind tangent sferei, iar dacă $R^2-d^2<0$ cercul este imaginar, planul și sfera neavînd puncte reale comune.

Observație. În spațiul (R^3), planul și sfera sînt suprafețe. Ecuațiile lor sînt de forma

$$f(x, y, z)=0. \tag{5.8}$$

În sens larg, (5.7) reprezintă ecuația unei suprafețe în spațiu.

De exemplu, o ecuație de forma

$$f(x, y)=0, \tag{5.9}$$

reprezintă un cilindru din (R^3) ale cărui generatoare se sprijină pe curba de ecuație (5.10) din planul xOy.

Dreapta și cercul sînt curbe în spațiu. Ele sînt reprezentate prin două ecuații, deci ca intersecția a două suprafețe.

Aplicație. Să se determine centrul și raza cercului

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x=99 \\ 3y-4z+25=0. \end{cases}$$

Soluție. Sfera are centrul în $C(1, 0, 0)$ și raza $R=10$. Distanța de la centrul C la planul cercului este $d=5$. Rezultă $r=5\sqrt{3}$.

Ecuațiile perpendicularei din C pe planul cercului sînt

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-4} \Rightarrow x=1, 4y+3z=0$$

și intersectînd cu planul cercului rezultă coordonatele centrului cercului dat $(1, -3, 4)$.

Scanned with OKEN Scanner

III. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

1. INTEGRALA RIEMANN

§ 1.1. DEFINIȚIA INTEGRALEI RIEMANN

Considerăm funcția $f:[a, b]\to R$, mărginită și pozitivă pe $[a, b]$, graficul ei fiind astfel situat în întregime deasupra axei Ox (fig. 1.1).

Spunem că punctele $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ formează o *diviziune* (d_n) a segmentului $[a, b]$ dacă

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_i<\ldots<x_n=b.$$

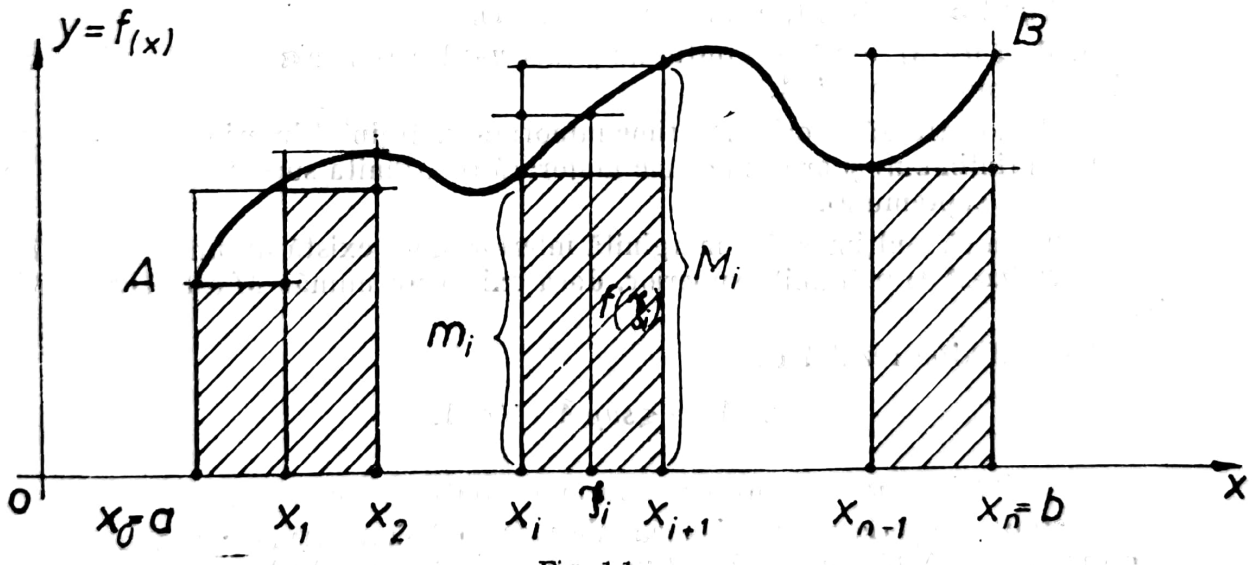


Fig. 1.1.

Segmentele $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0\div(n-1)$ se numesc *intervale parțiale ale diviziunii* (d_n), iar numărul

$$\nu(d_n)=\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}(x_{i+1}-x_i)$$

se numește *norma diviziunii*.

Fie (d) şi (d') două diviziuni ale intervalului $[a, b]$. Spunem că diviziunea (d') e mai fină decît diviziunea (d) şi notăm $(d)\subset(d')$, dacă diviziunea (d') conţine toate punctele diviziunii (d) şi alte puncte. În acest caz avem $\nu(d)\geqslant\nu(d')$.

Se poate deci forma un şir de diviziuni (d_n) din ce în ce mai fine

$$(d_1)\subset(d_2)\subset\ldots\subset(d_n)\subset\ldots,$$

cu normele

$$\nu(d_1)\geqslant\nu(d_2)\geqslant\ldots\geqslant\nu(d_n)\geqslant\ldots,$$

astfel ca

$$\lim_{n\to\infty}\nu(d_n)=0.$$

Vom nota

$$m_i=\inf f(x),\ M_i=\sup f(x),\ x\in[x_i,\ x_{i+1}],$$

m_i şi M_i reprezentînd cel mai mare minorant, respectiv cel mai mic majorant al mulţimii A a valorilor funcţiei pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ şi citim : „m_i — *infimum din* $f(x)$“, „M_i — *supremum din* $f(x)$“.

Proprietăţile definitorii ale lui m_i sînt :

a) $\forall y\in A\Rightarrow y\geqslant m_i$ (m_i e minorant a lui A),

b) dacă $\alpha>m_i$ există cel puţin un punct $y_0\in A$ astfel ca $m_i<y_0<\alpha$ (m_i e cel mai mare minorant a lui A).

Proprietăţile definitorii ale lui M_i sînt :

a) $\forall y\in A\Rightarrow y\leqslant M_i$ (M_i e majorant a lui A),

b) dacă $\alpha<M_i$ există cel puţin un punct $y_0\in A$ astfel ca $\alpha<y_0<M_i$ (M_i e cel mai mic majorant a lui A.)

Se demonstrează că orice mulţime minorată (mărginită inferior) are margine inferioară (infimum) şi orice mulţime majorată (mărginită superior) are margine superioară (supremum).

Spunem că mulţimea A e mărginită inferior, dacă există un număr m astfel ca $m\leqslant x$, $\forall x\in A$ şi mărginită superior, dacă există un număr M astfel ca $x\leqslant M$, $\forall x\in A$.

Din definiţie rezultă că

$$\inf A\leqslant x\leqslant\sup A,\quad\forall x\in A.$$

Dacă $\inf A=\sup A$, mulţimea e formată dintr-un singur punct.

Marginea superioară şi marginea inferioară pot să aparţină sau să nu aparţină mulţimii. Astfel, în cazul mulţimii $A=(\alpha,\beta]$, $\beta=\sup A\in A$ şi $\alpha=\inf A\notin A$.

Suma ariilor dreptunghiurilor care au ca bază segmentele $[x_i, x_{i+1}]$ şi înălţimea egală cu m_i ($i=0\div n-1$) este (vezi fig. 1.1)

$$s_n=\sum_{i=0}^{n-1}m_i(x_{i+1}-x_i)=\sum_{[a,\ b]}m_i(x_{i+1}-x_i). \tag{1.1}$$

Ea aproximează prin lipsă aria trapezului curbiliniu $aABb$ și se numește *suma inferioară Darboux a funcției* $f(x)$, corespunzătoare diviziunii (d_n).

Dacă considerăm dreptunghiurile cu înălțimile M_i, suma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i) = \sum_{[a,\, b]} M_i (x_{i+1} - x_i) \tag{1.2}$$

aproximează prin adaos aria trapezului curbiliniu $aABb$ și se numește *suma superioară Darboux a funcției* $f(x)$ corespunzătoare diviziunii (d_n).

Luînd pe fiecare interval parțial $[x_i, x_{i+1}]$ cîte un punct arbitrar ξ_i (numit punct intermediar), putem considera dreptunghiurile cu înălțimile $f(\xi_i)$.

Cum

$$m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i, \quad i = 0 \div (n-1)$$

suma

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i) = \sum_{[a,\, b]} f(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i) \tag{1.3}$$

satisface dubla inegalitate

$$s_n \leqslant \sigma_n \leqslant S_n, \tag{1.4}$$

se numește *suma Riemann a funcției* $f(x)$, corespunzătoare diviziunii (d_n) și a alegerii punctelor (intermediare) ξ_i și aproximează aria trapezului $aABb$.

Considerînd diviziuni (d_n) din ce în ce mai fine astfel ca $\nu(d_n) \to 0$ cînd $n \to \infty$, numerele s_n, σ_n și S_n vor fi aproximări din ce în ce mai bune ale ariei trapezului $aABb$.

Dacă în aceste condiții

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = I, \tag{1.5}$$

atunci din (1.4) rezultă că și

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = I,$$

funcția se zice *integrabilă Riemann pe intervalul* $[a, b]$, iar numărul

$$I = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} S_n, \tag{1.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

care exprimă aria trapezului $aABb$, se notează

$$I = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{1.7.}$$

se numește *integrala (definită) în sens Riemann a funcției* $f(x)$ pe $[a, b]$ și se citește „integrală de la a la b din $f(x)\,dx$". Simbolul $\int$ se numește *semn de integrare* sau *semnul integralei*, $[a, b]$ se numește *interval de integrare*, iar a și b *limite de integrare* (a – *limita inferioară*, b – *limita superioară*). Funcția $f(x)$ se numește *funcție de integrat*, iar x *variabila de integrare*.

Pentru simplificarea scrierii, integrala definită (1.7) se mai notează :

$$\int_a^b f(x) \quad \text{sau} \quad \int_a^b f\,dx \quad \text{sau} \quad \int_a^b f.$$

Dacă $f(x)$ nu e pozitivă pe întreg segmentul $[a, b]$, pentru a exprima aria figurii mărginită de : axa Ox, graficul funcției și paralelele la Oy prin a și b, vom descompune segmentul $[a, b]$ în intervale în care $f(x)$ păstrează semn constant.

Astfel, în cazul fig. 1.2, așa cum rezultă din considerațiile anterioare (formula 1.7), aria figurii haşurate va fi

$$S = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta -f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx.$$

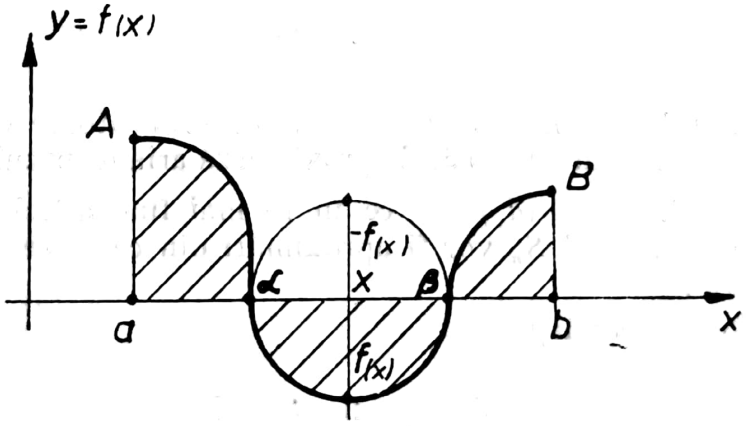


Fig. 1.2.

Imaginea din fig. 2 corespunde cazului în care $f(x)$ este continuă. Considerațiile anterioare,de evaluare a ariei, rămîn valabile și dacă funcția $f(x)$ are un număr finit de puncte de discontinuitate. În acest caz se impune însă ca punctele în care funcția e discontinuă să fie alese puncte ale diviziunii.

Aplicație. Să se calculeze

$$\int_0^1 (2x^2 + x)\,dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie diviziunea (d_n) a intervalului $[0, 1]$, realizată de punctele echidistante $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0 \div n$ (fig. 1 3), care determină intervalele parțiale $[x_i, x_{i+1}]$, avînd lungimea $x_{i+1} - x_i = \frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} = \frac{1}{n}$, $i = 0 \div (n-1)$.

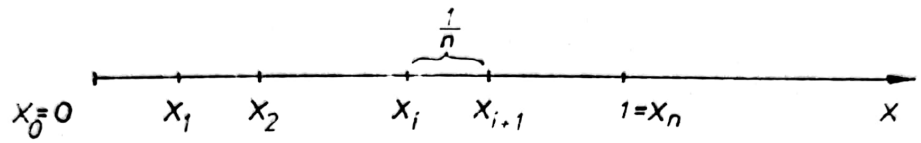


Fig. 1.3.

Cum $f(x) = 2x^2 + x$ e o funcție crescătoare pe $[0, 1]$, $m_i = f(x_i) = f\left(\frac{i}{n}\right) = 2\frac{i^2}{n^2} + \frac{i}{n}$, $M_i = f(x_{i+1}) = f\left(\frac{i+1}{n}\right) = 2\frac{(i+1)^2}{n^2} + \frac{i+1}{n}$, iar sumele (1.1) și (1.2) sînt

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(2\frac{i^2}{n^2} + \frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{2}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i,$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left[2\frac{(i+1)^2}{n^2} + \frac{i+1}{n}\right]\frac{1}{n} = \frac{2}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} (i+1).$$

Avînd în vedere

(1.8) $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(1.9) $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n-1)}{6},$$

deducem

$$s_n = \frac{(n-1)(2n-3)}{3n^2} + \frac{n-1}{2n} = \frac{7n^2 - 13n + 3}{6n^2}$$

$$S_n = \frac{(n+1)(2n-1)}{3n^2} + \frac{n+1}{2n} = \frac{7n^2 + 5n - 2}{6n^2}.$$

Obținem astfel

$$I=\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\int_0^1 (2x^2+x)\,dx=\frac{7}{6}.$$

Să construim și suma Riemann corespunzătoare diviziunii (d_n) și a punctelor intermediare $\xi_i=\frac{x_i+x_{i+1}}{2}=\frac{2i+1}{2n}$, alese la mijlocul intervalelor parțiale. Obținem suma Riemann

$$\sigma_n=\sum_{i=0}^{n-1}\left[2\left(\frac{2i+1}{2n}\right)^2+\frac{2i+1}{2n}\right]\frac{1}{n}=\frac{2}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2+\frac{2}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i+\frac{1}{2n},$$

care cu (1.8) și (1.9) se scrie

$$\sigma_n=\frac{(n-1)(2n-3)}{3n^2}+\frac{n-1}{n^2}+\frac{1}{2n^2}+\frac{n-1}{2n}+\frac{1}{2n}.$$

Trecînd la limită aflăm

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}=\int_0^1 (2x^2+x)\,dx.$$

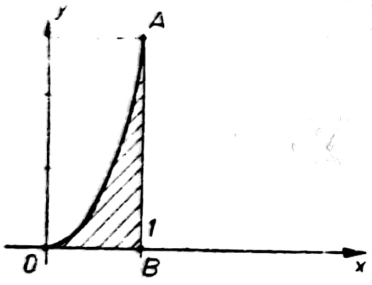


Fig. 1.4.

același rezultat ca în cazul utilizării sumelor Darboux. Integrala calculată exprimă aria trapezului (triunghiului) curbiliniu OAB, OA fiind arcul de curbă $y=2x^2+x$, $x\in[0,\ 1]$ (fig. 1.4).

§ 1.2. PROPRIETĂȚI ALE SUMELOR DARBOUX

Proprietatea 1. *Dacă* $m\leqslant f(x)\leqslant M$, $\forall x\in[a,\ b]$, atunci

$$m\,(b-a)\leqslant s_n\leqslant S_n\leqslant M\,(b-a).$$

Cu notațiile introduse avem

$$m\leqslant m_i\leqslant M_i\leqslant M,$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel că

$$\sum_{i=0}^{n-1} m\,(x_{i+1}-x_i) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} m_i\,(x_{i+1}-x_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} M_i\,(x_{i+1}-x_i) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} M\,(x_{i+1}-x_i).$$

Deci

$$m\,(b-a) \leqslant s_n \leqslant S_n \leqslant M\,(b-a).$$

Proprietatea 2. *Dacă* $(d') \supset (d)$, avem

$$s_d \leqslant s_{d'} \leqslant S_{d'} \leqslant S_d\,,$$

s_d S_d și $s_{d'}$, $S_{d'}$, *fiind respectiv sumele Darboux corespunzătoare diviziunilor* (d) și (d').

Notînd ca în fig. 1.5 cu $x_{i,k}$, $k=0\div(\alpha_i+1)$, punctele diviziunii (d') de pe intervalul parțial $[x_i, x_{i+1}]$ al diviziunii (d), $(x_{i,0}=x_1, x_{i,\alpha_i+1}=x_{i+1})$

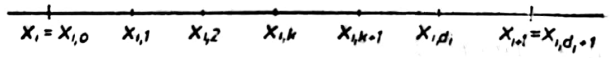


Fig. 1.5.

și cu $m_{i,k}=inf\ f(x)$, $M_{i,k}=sup\ f(x)$, $x\in[x_{i,k}, x_{i,k+1}]$, avem

$$m_i \leqslant m_{i,k} \leqslant M_{i,k} \leqslant M_i,\ i=0\div(n-1),$$

astfel că

$$m_i\,(x_{i+1}-x_i) \leqslant \sum_{k=0}^{\alpha_i} m_{i,k}\,(x_{i,k+1}-x_{i,k}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\alpha_i} M_{i,k}\,(x_{i,\,k+1}-x_{i,k}) \leqslant M_i\,(x_{1+i}-x_i).$$

Însumînd aceste inegalități membru cu membru după i, $i=0\div(n-1)$, obținem inegalitățile

$$s_d \leqslant s_{d'} \leqslant S_{d'} \leqslant S_d\,,$$

din care deducem că sumele inferioare Darboux nu descresc, iar sumele superioare nu cresc, cînd se trece de la o diviziune la alta, mai fină.

Proprietatea 3. *Oricare ar fi diviziunile* (d') și (d''), $s_{d'} \leqslant S_{d''}$. *(Orice sumă inferioară e mai mică sau egală cu orice sumă superioară.)*

Scanned with OKEN Scanner

Considerînd diviziunea (d) formată din toate punctele diviziunilor (d') şi (d'') avem

$$s_{d'} \leqslant s_d \leqslant S_d \leqslant S_{d'}$$

$$s_{d''} \leqslant s_d \leqslant S_d \leqslant S_{d''},$$

de unde rezultă

$$s_{d'} \leqslant S_d \leqslant S_{d''}.$$

Corolar. Luînd diviziunea (d_0) arbitrară, pentru orice diviziune (d)

$$s_d \leqslant S_{d_0},$$

astfel că S_{d_0} e un majorant al mulţimii s_d a sumelor inferioare Darboux. Mulţimea s_d are o margine superioară $\underline{I}$ (cel mai mic majorant al sumelor s_d) pe care o notăm

$$\underline{I} = \sup_{(d)} s_d = \int_a^b f(x)\,dx$$

şi o numim *integrala inferioară Darboux.*

În mod analog se defineşte

$$\bar{I} = \inf_{(d)} S_d = \int_a^b f(x)\,dx$$

integrala superioară Darboux.

Avem deci

$$s_d \leqslant \underline{I} \leqslant \bar{I} \leqslant S_d, \quad \forall\,(d)$$

şi integrabilitatea funcţiei $f(x)$ e condiţionată de egalitatea $\underline{I} = \bar{I}$ a integralelor Darboux.

§ 1.3. CRITERII DE INTEGRABILITATE. CLASE DE FUNCŢII INTEGRABILE

Integrala definită (1.7) există dacă condiţiile (1.6) sînt îndeplinite, în care caz spunem că funcţia $f(x)$ este integrabilă Riemann pe intervalul $[a, b]$. Putem deci formula următoarele definiţii :

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 1. Funcția mărginită $f:[a, b]\to R$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$, dacă pentru orice șir de diviziuni (d_n) a intervalului $[a, b]$, cu norma $\nu(d_n)\to 0$ cînd $n\to\infty$, șirurile sumelor Darboux (s_n) și (S_n) au limită comună, finită.

Definiția 2. Funcția mărginită $f:[a, b]\to R$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$, dacă pentru orice șir de diviziuni (d_n) cu norma $\nu(d_n)\to 0$ cînd $n\to\infty$ și pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_i, șirurile (σ_n), ale sumelor Riemann corespunzătoare, au limită comună, finită.

Din definițiile date rezultă criteriile de integrabilitate :

Criteriul 1 (al lui Darboux). *O condiție necesară și suficientă ca funcția mărginită $f:[a, b]\to R$ să fie integrabilă Riemann pe $[a, b]$ este ca pentru orice număr $\varepsilon>0$ să existe număr $\delta(\varepsilon)$, astfel ca, oricare ar fi diviziunea (d_n) cu $\nu(d_n)<\delta(\varepsilon)$, $S_n-s_n<\varepsilon$.*

Condiția e necesară. Într-adevăr, funcția fiind integrabilă $\lim\limits_{\nu(d_n)\to 0} s_n=\lim\limits_{\nu(d_n)\to 0} S_n=I$ astfel că

$$I-s_n<\frac{\varepsilon}{2}\,,\quad S_n-I<\frac{\varepsilon}{2}\,,\quad \text{dacă}\quad \nu(d_n)<\delta(\varepsilon).$$

Rezultă

$$S_n-s_n=(S_n-I)+(I-s_n)<\varepsilon,\ \text{dacă}\ \nu(d_n)<\delta(\varepsilon).$$

Condiția e suficientă Într-adevăr, considerînd $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=I_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=I_2$, conform proprietăților sumelor Darboux avem

$$s_n\leqslant I_1\leqslant I_2\leqslant S_n.$$

Deducem că

$$I_2-I_1\leqslant S_n-s_n<\varepsilon,\quad \text{dacă}\quad n>N(\varepsilon),$$

deci $I_1=I_2$ și funcția f e integrabilă.

Condiția ca o funcție să fie integrabilă, așa cum e formulată prin definiția 2, este exprimată de următorul criteriu de integrabilitate :

Criteriul 2. *Funcția mărginită $f:[a, b]\to R$ e integrabilă Riemann pe $[a, b]$, dacă și numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon>0$, există un număr $\delta(\varepsilon)>0$ și un număr I astfel ca, oricare ar fi diviziunea (d_n) cu $\nu(d_n)<\delta(\varepsilon)$ și oricare ar fi alegerea punctelor intermediare ξ_i în diviziunea (d_n), să avem $|\sigma_n-I|<\varepsilon$ (numărul I este $\int_a^b f(x)\,dx$).*

Următoarele teoreme precizează clase de funcții integrabile.

Teorema 1. *O funcție $f(x)$ monotonă pe $[a, b]$ e integrabilă pe $[a, b]$.*

Fie numărul $\varepsilon>0$ și diviziunea (d_n) a intervalului $[a, b]$ astfel ca $\nu(d_n)<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Funcția $f(x)$ e monotonă ; presupunînd-o crescătoare, $M_i=f(x_{i+1})$, $m_i=f(x_i)$ și cum $x_{i+1}-x_i<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, $i=0\div(n-1)$

$$S_n-s_n=\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_{i+1})-f(x_i)](x_{i+1}-x_i)<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_{i+1})-f(x_i)].$$

Scanned with OKEN Scanner

Dezvoltînd suma, rezultă

$$S_n - s_n < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\,[f(x_n)-f(x_0)] = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\,[f(b)-f(a)].$$

Deci

$$S_n - s_n < \varepsilon, \text{ dacă } \nu(d_n) < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$$

și, conform criteriului de integrabilitate Darboux, $f(x)$ e integrabilă pe $[a, b]$.

Teorema 2. *O funcție $f(x)$ continuă pe $[a, b]$ e integrabilă Riemann pe $[a, b]$.*

Fie diviziunea (d_n) a intervalului $[a, b]$. Funcția $f(x)$ fiind continuă pe fiecare interval compact $[x_i, x_{i+1}]$ (mulțime mărginită și închisă), își atinge marginile pe aceste intervale, adică $m_i = f(x_i')$, $M_i = f(x_i'')$, $x_i', x_i'' \in [x_i, x_{i+1}]$, încît

$$S_n - s_n = \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i'') - f(x_i')]\ (x_{i+1} - x_i).$$

Funcția $f(x)$ — continuă pe $[a, b]$, e uniform continuă pe $[a, b]$, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel ca

$$|f(x_i'') - f(x_i')| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \text{ dacă } |x_i' - x_i''| < \delta(\varepsilon).$$

Luînd $\nu(d_n) < \delta(\varepsilon)$ avem $|x_i' - x_i''| < \delta(\varepsilon)$ și

$$S_n - s_n < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Deci

$$S_n - s_n < \varepsilon, \text{ dacă } \nu(d_n) < \delta(\varepsilon)$$

și, conform criteriului de integrabilitate Darboux, $f(x)$ este integrabilă pe $[a, b]$.

Propoziție. *Dacă funcția $f(x)$ e integrabilă pe $[a, b]$, ea e mărginită pe $[a, b]$.*

Funcția $f(x)$ fiind integrabilă pe $[a, b]$, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, considerînd o diviziunea (d_n) astfel ca $\nu(d_n) < \delta(\varepsilon)$, avem

$$|\sigma_n - I| < \varepsilon,$$

p_n fiind suma Riemann a funcției $f(x)$, corespunzătoare diviziunii (d_n) și alegerii punctelor intermediare $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Deci

$$I - \varepsilon < \sigma_n < I + \varepsilon, \text{ cînd } \nu(d_n) < \delta(\varepsilon). \tag{1.10}$$

Dacă funcția $f(x)$ e nemărginită superior, există un interval parțial $[x_j, x_{j+1}]$ al diviziunii (d_n) cu proprietatea

$$\sup_{x_j < x < x_{j+1}} f(x) = +\infty$$

Scanned with OKEN Scanner

și vom putea alege punctul intermediar $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$ astfel ca

$$f(\xi_j) > \frac{I-\Omega+2\varepsilon}{x_{j+1}-x_j}, \text{ unde } \Omega = \sum_{i\neq j}^{n-1} f(\xi_i)\,(x_{i+1}-x_i). \tag{1.11}$$

Avînd în vedere (1.11)

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,(x_{i+1}-x_i) = \Omega + f(\xi_j)\,(x_{j+1}-x_j) > \Omega + \frac{I-\Omega+2\varepsilon}{x_{j+1}-x_j}\,(x_{j+1}-x_j),$$

adică

$$\sigma_n > I+2\varepsilon,$$

ceea ce contrazice condiția (1.10). Deci $f(x)$ nu e nemărginită superior.

Pentru a demonstra că funcția $f(x)$ nu e nemărginită inferior, se alege punctul intermediar ξ_j astfel ca

$$f(\xi_j) < \frac{I-\Omega-2\varepsilon}{x_{j+1}-x_j}$$

și se ajunge la concluzia că $\sigma_n < I-2\varepsilon < I-\varepsilon$, ceea ce contrazice condiția (1.10).

Reciproca acestei propoziții nu e adevărată : dacă o funcție e mărginită pe un interval, nu rezultă că e integrabilă pe acel interval.

Astfel, în cazul funcției $f : [a, b] \to R$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{cînd } x \text{ este rațional} \\ 0, & \text{cînd } x \text{ este irațional} \end{cases}$$

mărginită, considerînd o diviziune (d_n) și punctele $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ numere raționale, $f(\xi_i)=1$ și suma Riemann este

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i) = b-a.$$

Dacă se aleg punctele ξ_i numere iraționale, $f(\xi_i)=0$, iar $\sigma_n=0$.

Rezultă că sumele Riemann nu au limită și deci $f(x)$ nu e integrabilă.

§ 1.4. PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR INTEGRABILE

Din definiție rezultă că integrala Riemann e un număr care nu depinde de variabila de integrare, ea putîndu-se nota cu orice literă :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(s)\,ds.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tot din definiție se deduc direct următoarele proprietăți :

1°. *Dacă* $f(x)$ *e integrabilă pe* $[a, b]$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Afirmația rezultă avînd în vedere că pentru a calcula $\int_b^a f(x)\,dx$ se ia diviziunea (d_n) a intervalului de integrare ca în fig. 1.6. ceea ce face ca în sumele integrale să avem $x_{i+1}-x_i<0$, față de sumele integrale care conduc la $\int_a^b f(x)\,dx$, în care $x_{i+1}-x_i>0$, astfel că aceste sume integrale sînt egale în valoare absolută, dar de semne contrare.

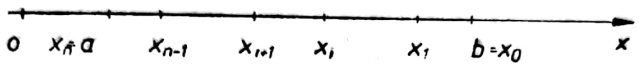


Fig. 1.6.

2°. *Funcția* $f(x)$, *definită pe un interval* $[a, a]$ *cu extremitățile egale, este integrabilă pe acest interval și*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Într-adevăr, considerînd diviziunea (d_n) a lui $[a, a]$ avem $x_{i+1}-x_i=0$, $i=0\div(n-1)$ și deci $\sigma_n=0$, oricare ar fi n

Rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

3°. *Funcția constantă* $f(x)=\alpha$ *e integrabilă pe* $[a, b]$ *și*

$$\int_a^b \alpha\,dx = \alpha\,(b-a).$$

Într-adevăr, cum $f(x)=\alpha$

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\ (x_{i+1}-x_i) = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i) = \alpha\,(b-a)$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int_a^b \alpha\,dx = \alpha\,(b-a).$$

4°. *Dacă* $f(x)$ *e integrabilă pe* $[a, b]$ *și* $f(x)\geqslant 0$ *pe* $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Într-adevăr, cum $f(\xi_i)\geqslant 0$

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\ (x_{i+1}-x_i) \geqslant 0$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

5°. *Dacă $f(x)$ și $g(x)$ sînt integrabile pe $[a, b]$, atunci și funcția $f(x)+g(x)$ e integrabilă pe $[a, b]$ și*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

(proprietatea de additivitate a integralei față de funcții).

Cu notațiile introduse

$$\sigma_n (f+g) = \sum_{i=0}^{n-1} [f(\xi_i)+g(\xi_i)](x_{i+1}-x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)(x_{i+1}-x_i) = \sigma_n (f)+\sigma_n (g).$$

Cum $f(x)$ și $g(x)$ sînt integrabile pe $[a, b]$, există

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n (f) = \int_a^b f \quad \text{și} \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n (g) = \int_a^b g.$$

Există deci și

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n (f+g) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n (f) + \lim_{n\to\infty} \sigma_n (g) = \int f + \int g,$$

astfel că $f(x)+g(x)$ e integrabilă pe $[a, b]$ și

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Se demonstrează prin inducție matematică că această proprietate se menține și în cazul a n funcții, $n>2$.

6°. *Dacă $f(x)$ e integrabilă pe $[a, b]$, atunci și funcția $\lambda f(x)$, $\lambda \in R$, e integrabilă pe $[a, b]$ și*

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

Suma Riemann a funcției $\lambda f(x)$ este

$$\sigma_n (\lambda f) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i) = \lambda \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i) = \lambda \sigma_n (f).$$

Cum $f(x)$ e integrabilă pe $[a, b]$ există

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n (f) = \int_a^b f.$$

Există deci și

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n (\lambda f) = \lambda \lim_{n\to\infty} \sigma_n (f),$$

astfel că $\lambda f(x)$ este integrabilă pe $[a, b]$ și

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

Scanned with OKEN Scanner

Observaţie : a) Avînd satisfăcute proprietăţile 5^0 şi 6^0, rezultă că mulţimea funcţiilor integrabile pe un interval $[a, b]$ formează un *spaţiu vectorial*.

b) Proprietăţile 5^0 şi 6^0 se pot exprima în următorul enunţ : dacă funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ sînt integrabile pe $[a, b]$, atunci şi funcţia $\lambda f+\mu g$, $\lambda, \mu \in R$, e integrabilă pe $[a, b]$ şi

$$\int_a^b (\lambda f+\mu g)=\lambda \int_a^b f+\mu \int_a^b g.$$

c) Dacă în afirmaţia de la punctul b) luăm $\lambda=1$, $\mu=-1$, deducem că dacă $f(x)$ şi $g(x)$ sînt integrabile pe $[a, b]$, atunci şi funcţia $f-g$ e integrabilă pe $[a, b]$ şi

$$\int_a^b f(-g) = \int_a^b f - \int_a^b g.$$

7^0. Dacă $f(x)$ şi $g(x)$ sînt integrabile pe $[a, b]$ şi $f(x) \geqslant g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Funcţia $h(x)=f(x)-g(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [a, b]$, este integrabilă pe $[a, b]$ şi conform proprietăţii 4^0

$$\int_a^b h(x)\,dx \geqslant 0.$$

Avem deci

$$\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0,$$

sau

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

8^0. Funcţia $f(x)$, integrabilă pe $[a, b]$, e integrabilă pe orice interval $[a_1, b_1] \subset [a, b]$.

Diviziunea (d_n) a intervalului $[a, b]$ va determina o diviziune (d_m) a intervalului $[a_1, b_1]$. Funcţia $f(x)$ fiind integrabilă pe $[a, b]$, dacă $\nu(d_n)<\delta(\varepsilon)$

$$S_n - s_n = \sum_{[a, b]} (M_i - m_i)(x_{i+1}-x_i) < \varepsilon$$

În acest caz şi $\nu(d_m)<\delta(\varepsilon)$ şi, notînd cu s_m, S_m sumele Darboux corespunzătoare diviziunii (d_m)

$$S_m - s_m = \sum_{[a_1, b_1]} (M_i - m_i)(x_{i+1}-x_i) \leqslant S_n - s_n < \varepsilon$$

şi $f(x)$ este integrabilă pe $[a_1, b_1]$.

În consideraţiile făcute se impune ca diviziunea (d_n) să conţină punctele a_1 şi b_1.

Scanned with OKEN Scanner

9^0. Dacă $f(x)$ e integrabilă pe $[a, b]$ și $c \in [a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(aditivitatea integralei față de intervale).

Fie diviziunea (d_n) a intervalului $[a, b]$, c fiind punct al diviziunii. Cu notațiile introduse

$$\sigma_n(f) = \sum_{[a,b]} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i) = \sum_{[a,c]} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i) + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i). \tag{1.12}$$

Cum $f(x)$ e integrabilă pe $[a, b]$, va fi integrabilă și pe intervalele $[a, c]$ și $[c, b]$ încît, trecînd la limită în egalitatea (1.12), obținem

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Observație. Proprietatea 9^0 se menține și în cazul în care punctul c e exterior segmentului $[a, b]$.

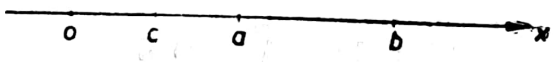


Fig. 1.7.

Astfel, dacă c se află pe axa numerelor la stînga lui a, fig. 1.7, avem

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$$

sau

$$\int_c^b f(x)\,dx = -\int_a^c f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx.$$

Obținem deci

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Se presupune evident că $f(x)$ e integrabilă pe intervalul $[c, b]$.

10^0. Dacă $f(x)$ e integrabilă pe $[a, b]$, atunci și funcția $|f(x)|$ e integrabilă pe $[a, b]$ și

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Notăm $|f| = \bar{f}$ și $\bar{S}_n$, $\bar{s}_n$ sumele Darboux ale funcției $|f|$, corespunzătoare diviziunii (d_n) a segmentului $[a, b]$. Dacă $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0 \div (n-1)$

$$m_i \leqslant f(x) \leqslant M_i$$

$$\bar{m}_i \leqslant \bar{f}(x) \leqslant \bar{M}_i.$$

Cum

$$\bar{M}_i - \bar{m}_i \leqslant M_i - m_i,\ i=0 \div (n-1)$$

$$(1.13)\quad \bar{S}_n - \bar{s}_n = \sum_{i=0}^{n-1} (\bar{M}_i - \bar{m}_i)\,(x_{i+1} - x_i) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\,(x_{i+1} - x_i) = S_n - s_n.$$

Funcția $f(x)$ fiind integrabilă pe $[a, b]$

$$S_n - s_n < \varepsilon \text{ dacă } \nu\,(d_n) < \delta\,(\varepsilon),$$

încît, din (1.13) deducem că

$$\bar{S}_n - \bar{s}_n < \varepsilon \text{ dacă } \nu\,(d_n) < \delta\,(\varepsilon).$$

și $|f(x)|$ este integrabilă pe $[a, b]$.

Dar

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|, \quad \forall x \in [a, b]$$

și din proprietatea de monotonie a integralei rezultă

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

sau

$$\left|\int f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

§ 1.5. FORMULA MEDIEI PENTRU INTEGRALE

Considerăm funcția $f(x)$ integrabilă pe $[a, b]$; ea va fi mărginită pe $[a, b]$, adică

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad \forall x \in [a, b],$$

m și M fiind infimumul, respectiv supremumul funcției $f(x)$ pe $[a, b]$.

Aplicînd proprietatea de monotonie a integralei obținem

$$m\,(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\,(b-a).$$

Există deci un număr μ, $m \leqslant \mu \leqslant M$, astfel ca

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu\,(b-a).$$

Dacă $f(x)$ e continuă pe $[a, b]$, există cel puțin un punct $\xi \in [a, b]$ astfel ca $f(\xi) = \mu$ și obținem egalitatea

$$(1.14)\quad \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a).$$

numită *formula mediei pentru integrale.*

Scanned with OKEN Scanner

În cazul în care $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [a, b]$, egalitatea (1.14) are următoarea interpretare geometrică (vezi fig. 1.8): aria trapezului curbiliniu $aABb$ este egală cu aria dreptunghiului care are ca bază segmentul $[a, b]$ și înălțimea egală cu $f(\xi)$, $\xi \in [a, b]$.

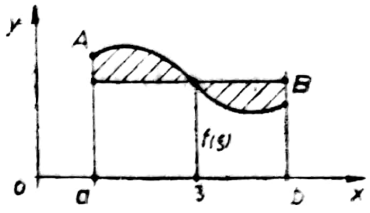


Fig. 1.8.

§ 1.6. PRIMITIVE. INTEGRALE NEDEFINITE

O funcție $F(x)$ se numește *primitivă a funcției* $f(x)$, definită pe $[a, b]$, dacă

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Dacă $F_1(x)$ și $F_2(x)$ sînt două primitive ale lui $f(x)$

$$\frac{dF_1}{dx} = f(x) = \frac{dF_2}{dx}$$

și

$$F_1(x) = F_2(x) + c, \quad c - \text{constantă arbitrară}.$$

Rezultă că două primitive oarecare diferă printr-o constantă, aditivă sau, mulțimea tuturor primitivelor unei funcții se obține adunînd o constantă arbitrară unei primitive oarecare, astfel că graficele primitivelor vor fi curbe paralele (vezi fig. 1.9), tangenta într-un punct de abscisă $x = \xi$ la graficul oricărei primitive avînd panta $\operatorname{tg} \theta = (F(x) + c)'_{x=\xi} = f(\xi)$.

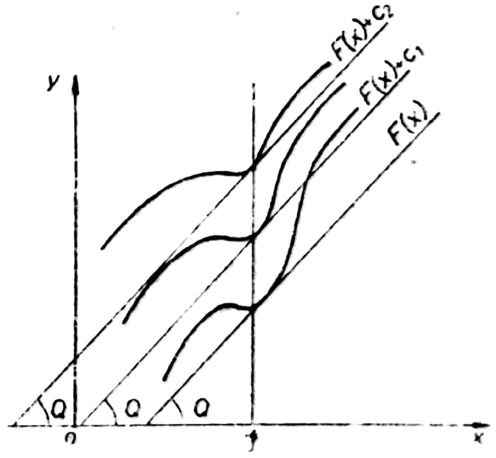


Fig. 1.9.

Integrala nedefinită. Fie $f(x)$ o funcție integrabilă pe $[a, b]$ și $c \in [a, b]$.

Funcția

$$F(x) = \int_c^x f(x)\, dx$$

e definită pe $[a, b]$ și se numește *integrala nedefinită a funcției* $f(x)$.

Din egalitatea

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_c^b f(x)\, dx - \int_a^c f(x)\, dx,$$

rezultă că

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a). \tag{1.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

Proprietăți ale integralelor nedefinite vor fi exprimate de teoremele :

Teorema 1. *Dacă $f(x)$ este integrabilă pe $[a, b]$, funcția*

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$$

e continuă pe (a, b).

Pentru a arăta că $F(x)$ e continuă în $x_0\in(a, b)$, calculăm diferența

$$F(x)-F(x_0)=\int_a^x f(x)\,dx-\int_a^{x_0} f(x)\,dx=\int_{x_0}^x f(x)\,dx.$$

Funcția $f(x)$ fiind integrabilă pe $[a, b]$, e mărginită pe $[a, b]$; există deci un număr $M>0$ astfel ca $|f(x)|<M$, $\forall x\in[a, b]$, încît

$$|F(x)-F(x_0)|=\left|\int_{x_0}^x f(x)\,dx\right|\leqslant\int_{x_0}^x |f(x)|\,dx\leqslant M|x-x_0|.$$

Rezultă că $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)=F(x_0)$ și funcția $F(x)$ este continuă în x_0 ; x_0 fiind un punct arbitrar de pe (a, b), deducem că $F(x)$ e continuă pe (a, b).

Teorema 2. *Dacă $f(x)$ e continuă pe $[a, b]$, funcția*

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$$

e derivabilă pe (a, b) și $\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$, $\forall x\in(a, b)$.

Fie un punct arbitrar $x_0\in(a, b)$. Cum $f(x)$ e continuă pe $[a, b]$, avînd în vedere formula mediei, expresia

$$F(x)-F(x_0)=\int_a^x f(x)\,dx-\int_a^{x_0} f(x)\,dx=\int_{x_0}^x f(x)\,dx$$

devine

$$F(x)-F(x_0)=f(\xi)\ (x-x_0),\ \xi\in(x_0,\ x)\subset(a,\ b). \tag{1.16}$$

Cînd $x\to x_0$, $\xi\to x_0$ și $f(x)$ fiind continuă pe $[a, b]$, $f(\xi)\to f(x_0)$ astfel că, din (1.16), obținem

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0).$$

Deci $F(x)$ este derivabilă în punctul x_0 și

$$\left(\frac{dF(x)}{dx}\right)_{x_0}=f(x_0).$$

Punctul x_0 fiind arbitrar, deducem că

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x),\ \forall x\in(a,\ b).$$

Scanned with OKEN Scanner

Consecințe : a) Dacă $f(x)$ e continuă pe $[a, b]$, așa cum rezultă din teorema de mai sus, ea are o primitivă

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx.$$

b) Dacă $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$ și dacă $\alpha, \beta \in [a, b]$, atunci

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=F(\beta)-F(\alpha),$$

oricare ar fi primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$.

Considerînd integrala nedefinită

$$F_1(x)=\int_a^x f(x)\,dx.$$

care este o primitivă a lui $f(x)$, din (1.15) rezultă

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=F_1(\beta)-F_1(\alpha).$$

O primitivă oarecare a lui $f(x)$ va fi $F(x)=F_1(x)+c$ (c — constantă arbitrară) și

$$F(\beta)-F(\alpha)=[F_1(\beta)+c]-[F_1(\alpha)+c]=F_1(\beta)-F_1(\alpha)=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx,$$

deci

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=F(\beta)-F(\alpha)=F(x)\Big|_\alpha^\beta. \tag{1.17}$$

Egalitatea (1.17), în care $F(x)$ e o primitivă oarecare a funcției $f(x)$, se numește *formula lui Leibniz-Newton* și reprezintă un mijloc comod de calcul al integralelor definite.

Exemplu. Refăcînd integrala $\int_0^1 (2x^2+x)\,dx$ calculată la § 1.1 folosind definiția integralei, o vom calcula acum folosind formula lui Leibniz-Newton.

O primitivă a funcției $f(x)=2x^2+x$ este $F(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}+c$ (c — constantă arbitrară), încît

$$\int_0^1 (2x^2+x)\,dx=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}+c\right)\Big|_0^1=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+c\right)-c=\frac{7}{6}.$$

Observăm că, constanta c, care face cu o primitivă să difere de alta, nu e esențială în calculul integralelor definite, deci în formula lui Leibniz-Newton ea poate fi omisă.

Dacă în integrala nedefinită

$$\int_a^x f(x)\,dx=F(x)-F(a)=F(x)+c_1$$

Scanned with OKEN Scanner

($F(x)$ e o primitivă) nu se precizează limita inferioară, limita superioară subînțelegîndu-se a fi x, se constată că integrala nedefinită se exprimă prin mulțimea tuturor primitivelor, și vom scrie

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c, \qquad c \in R. \tag{1.18}$$

Cum $(F(x))' = f(x)$, din (1.18) obținem

$$\int F'(x)\,dx = F(x)+c, \qquad \int dF(x) = F(x)+c$$

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \qquad d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx,$$

formule utilizate deseori.

O serie de proprietăți ale integralelor definite se pot formula și în cazul integralelor nedefinite, ele fiind folosite în determinarea primitivelor.

De exemplu

$$\int [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx.$$

§ 1.7. TABLOUL PRIMITIVELOR CURENTE

Dacă $f(x)$ e continuă, ea are o primitivă $F(x)$ care satisface egalitatea $(F(x))' = f(x)$, astfel că, utilizînd tabloul derivatelor funcțiilor uzuale, putem alcătui următorul tablou al primitivelor:

1. $\int 0 \cdot dx = c$
2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \qquad a \in R \setminus \{-1\}$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$
5. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, \qquad a > 0, \quad a \neq 1$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

Scanned with OKEN Scanner

9. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C, \qquad \cos x \neq 0$

10. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C, \qquad \sin x \neq 0$

11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C, \qquad \sin x \neq 0$

12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C, \qquad \cos x \neq 0$

13. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \qquad \cos x \neq 0$

14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \sin x \neq 0$

15. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \qquad a \neq 0$

16. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \qquad a \neq 0, |x| \neq a$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \qquad a \neq 0,\ x \in (-a, a)$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C.$

Utilizînd regulile de calcul :

$$\int [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx, \qquad \lambda, \mu \in R$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C, \qquad f(x) \neq 0$$

$$\int f'(x) f^n(x)\,dx = \frac{1}{n+1} f^{n+1}(x) + C, \qquad n \in R \setminus \{-1\},$$

din tabloul primitivelor curente se pot obține primitive ale unor funcții mai complicate.

Exemple :

a) $\int \left(2x^6 + \frac{10x}{x^2+4}\right)dx = 2\int x^6 dx + 5\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \frac{2}{7}x^7 + 5\ln(x^2+4) + C.$

Scanned with OKEN Scanner

b) $$\int \frac{4\,dx}{(x^2+4)\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}=\int \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx=$$

$$=2\int \frac{\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)'}{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}dx=2\ln\left|\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

c) $$\int \frac{(\arcsin x)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int(\arcsin x)'(\arcsin x)^{\frac{5}{2}}dx=$$

$$=\frac{2}{7}(\arcsin x)^{\frac{7}{2}}+C.$$

§ 1.8. METODE DE INTEGRARE

1.8.1. INTEGRARE PRIN PĂRȚI

Teoremă. *Dacă $u(x)$ și $v(x)$ au derivate continue, atunci*

$$\int u'(x)\,v(x)\,dx=u(x)\cdot v(x)-\int v'(x)\,u(x)\,dx.$$

Funcțiile $u(x)$ și $v(x)$ fiind derivabile, sînt continue. Rezultă că $u'v$ și $v'u$ sînt funcții continue, deci au primitive și există $\int u'v$ și $\int uv'$. Putem astfel integra egalitatea

(1.19) $$(uv)'=u'v+uv'$$

și obținem

(1.20) $$\int u'v\,dx=uv-\int uv'dx,$$

formula integrării prin părți.

Observații. 1°. Metoda se aplică atunci cînd se pot afla primitivele funcțiilor u' și uv'.

2°. În (1.20) notînd $u'dx=du$, $v'dx=dv$, obținem

(1.20′) $$\int v\,du=uv-\int u\,dv$$

formula integrării prin părți exprimată cu diferențiale.

3°. Dacă $u(x)$ și $v(x)$ au derivate continue pe $[a, b]$, din (1.19) rezultă că

$$\int_a^b (uv)'dx=\int_a^b uv'dx+\int_a^b u'v\,dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd membrului stîng formula lui Leibniz-Newton obținem

$$\int_a^b u'v\,dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b uv'\,dx, \tag{1.20''}$$

formula integrării prin părți în cazul integralelor definite.

Aplicații. Să se calculeze:

a) $I = \int x \ln (x^2+1)\,dx.$

Alegem părțile $u'=x$, $v=\ln(x^2+1)$; cum $u=\frac{x^2}{2}$, $v'=\frac{2x}{x^2+1}$, din (1.20) rezultă

$$I = \frac{x^2}{2}\ln(x^2+1) - \int \frac{x^3\,dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2}\ln(x^2+1) -$$

$$- \int \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x^2+1) - \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}[x^2 - \ln(x^2+1)] + c$$

b) $I = \int_0^1 x^2 e^{2x+3}\,dx.$

Alegem părțile $u'=e^{2x+3}$, $v=x^2$; cum $u=\frac{1}{2}e^{2x+3}$, $v'=2x$, din (1.20'') obținem

$$= \frac{x^2}{2}e^{2x+3}\Big|_0^1 - \int_0^1 xe^{2x+3}\,dx.$$

Pentru a calcula integrala rămasă, alegem părțile $u'=e^{2x+3}$, $v=x$; rezultă $u=\frac{1}{2}e^{2x+3}$, $v'=1$, încît

$$I = \frac{e^5}{2} - \left(\frac{x}{2}e^{2x+3}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x+3}\,dx\right) = \frac{e^5}{2} -$$

$$- \left(\frac{e^5}{2} - \frac{1}{4}e^{2x+3}\Big|_0^1\right) = \frac{1}{4}e^5.$$

c) $I = \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

Dacă alegem părțile (vezi 1.20') $v=\arcsin x$, $du=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, atunci $u=-\sqrt{1-x^2}$, $dv=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ și

$$I = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int dx = x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + C.$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

1.8.2. METODA SCHIMBĂRII VARIABILEI DE INTEGRARE

Teoremă. *Dacă $f(x)$ e continuă pe $[a, b]$, iar $x=\varphi(t)$ e strict monotonă, cu derivata continuă pe $[\alpha, \beta]$, α și β fiind respectiv soluțiile ecuațiilor $a=\varphi(t)$, $b=\varphi(t)$, atunci*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{1.21}$$

Din ipoteze rezultă că $[a, b]$ e imaginea prin $\varphi(t)$ a intervalului $[\alpha, \beta]$ și diviziunea (d_n) a intervalului $[a, b]$

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b,$$

determină o diviziune (d_n') a intervalului $[\alpha, \beta]$:

$$(d_n') \quad \alpha=t_0<t_1<\ldots<t_i<t_{i+1}<\ldots<t_n=\beta,$$

t_i fiind soluția ecuației $x_i=\varphi(t)$, $i=0\div n$, soluție unică deoarece funcția $\varphi(t)$ e strict monotonă.

Cu formula creșterilor finite a lui Lagrange

$$x_{i+1}-x_i=\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)=\varphi'(\tau_i)(t_{i+1}-t_i),\quad t_i<\tau_i<t_{i+1}.$$

Notăm $\varphi(\tau_i)=\xi_i\in(x_i, x_{i+1})$ și considerăm suma Riemann a funcției $f(x)$ corespunzătoare diviziunii (d_n) și a alegerii punctelor intermediare ξ_i

$$\sigma_n=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,(x_{i+1}-x_i)=\sum_{i=0}^{n-1} f[\varphi(\tau_i)]\,\varphi'(\tau_i)\,(t_{i+1}-t_i),$$

egală cu suma Riemann a funcției $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$.

Luînd diviziuni (d_n) astfel ca $\nu(d_n)\to 0$, la limită obținem

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \tag{1.22}$$

prima formulă de schimbare de variabilă în integrala definită.

Practic, pentru a calcula $\int_a^b f(x)\,dx$ se fac înlocuirile $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)\,dt$, limitele a și b înlocuindu-se cu valorile α și β care satisfac egalitățile $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

Formula (1.22) se poate aplica și pentru calculul primitivelor.

Într-adevăr, cu considerațiile făcute

$$\int_a^x f(x)\,dx=\int_{a'}^t f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt=F(t)-F(a')=F(t)+C_1, \tag{1.23}$$

unde

$$F(t)=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{1.24}$$

Dacă nu se precizează limita inferioară a, limita superioară subînțelegîndu-se, din (1.23) obținem

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt+C=F[\varphi^{-1}(x)]+C. \tag{1.25}$$

Constanta $C_1=F(\alpha)$ s-a înlocuit cu o constantă oarecare C, iar t cu inversa $\varphi^{-1}(x)$ a funcției $x=\varphi(t)$.

Egalitatea (1.25), cu $F(t)$ definit de (1.24), e prima *formulă de schimbare de variabilă în integrala nedefinită.*

Practic, pentru a calcula integrala nedefinită $I=\int f(x)\,dx$, facem înlocuirile $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)\,dt$ și obținem

$$I=\int f[\varphi(t)]\ \varphi'(t)\,dt=F(t)+C.$$

Din $x=\varphi(t)$ îl aflăm pe $t=\varphi^{-1}(x)$ și-l înlocuim în $F(t)$, încît

$$\int f(x)\,dx=F[\varphi^{-1}(x)]+C.$$

Aplicații. Să se calculeze :

a) $$I=\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx.$$

Facem substituția $x=\varphi(t)=R\cos t$; $\varphi(t)$ e o funcție strict monotonă pe $[0,\pi]$, cu derivata $\varphi'(t)=-R\sin t$ continuă. Din $-R=R\cos\alpha$ și $R=R\cos\beta$ deducem $\alpha=\pi$, $\beta=0$ și cu (1.22) obținem

$$I=\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx=\int_{\pi}^{0}\sqrt{R^2-R^2\cos^2 t}\,(-R\sin t)\,dt=-R^2\int_{\pi}^{0}\sin^2 t\,dt=$$

$$=-R^2\int_{\pi}^{0}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=-\frac{R^2}{2}\left[t\Big|_{\pi}^{0}-\int_{\pi}^{0}\cos 2t\,dt=\frac{\pi R^2}{2}+\frac{R^2\sin 2t}{4}\Big|_{\pi}^{0}=\frac{\pi R^2}{2}\right.\cdot$$

Observăm că integrala calculată exprimă aria semicercului $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $x\in[-R,R]$, situat deasupra axei ox, cu centrul în originea și raza R, vezi (1.7).

b) $$I=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\cdot$$

Facem schimbarea de variabilă $x=\operatorname{ctg} t$, $t\in(0,\pi)$. Rezultă $dx=\frac{-1}{\sin^2 t}\,dt$ și

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t}}\cdot\frac{-1}{\sin^2 t}\,dt=\int\frac{-dt}{\sin t}=-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+C.$$

Din $x=\operatorname{ctg} t$ trebuie calculat și substituit în rezultat t în funcție de x. De fapt interesează $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$. Cum $\operatorname{tg} t=\frac{1}{x}$

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}=\frac{1}{x}$$

și

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2}=-x\pm\sqrt{x^2+1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar $\frac{t}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și deci $\operatorname{tg}\frac{t}{2} > 0$, încît convine doar soluția

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2} = -x + \sqrt{x^2+1} > 0.$$

Făcînd înlocuirea obținem

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = -\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)+C = \ln\frac{1}{-x+\sqrt{x^2+1}}+C$$

și prin amplificarea fracției cu conjugata numitorului rezultă că

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C.$$

Observație. Formula (1.22), citită din membrul drept către membrul stîng, ne arată că pentru a calcula integrala

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

în care $\varphi(t)$ este strict monotonă, cu derivată continuă pe $[\alpha, \beta]$ se face substituția $\varphi(t)=x$, se înlocuiește $\varphi'(t)\,dt$ cu dx și se obține

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{1.22'}$$

unde $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$.

De asemenea, din (1.25) rezultă că, pentru a calcula integrala nedefinită

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

se face schimbarea de variabilă $\varphi(t)=x$, se înlocuiește $\varphi'(t)\,dt$ cu dx, trecîndu-se astfel de la variabila de integrare t la variabila de integrare x; se obține

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx, \quad \text{cu} \quad x=\varphi(t). \tag{1.25'}$$

Formulele (1.22') și (1.25') exprimă în alt mod prima formulă de schimbare de variabilă.

Cu observația făcută, putem obține din tabloul primitivelor imediate, *primitivele unor funcții compuse*. Astfel, dacă $u=u(x)$ e strict monotonă și cu derivata continuă, atunci prin substituția $u(x)=t$ obținem:

$1^0.$ $\int u^\alpha u'\,dx = \int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \qquad \alpha \neq -1$

$2^0.$ $\int \frac{u'}{u}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln|u|+C$

$3^0.$ $\int \frac{u'}{\sqrt{u}}\,dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+C = 2\sqrt{u}+C.$

Scanned with OKEN Scanner

Analog deducem

$4^0.\ \int \frac{u'}{u^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C, \qquad a\neq 0$

$5.\ \int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}\,dx = \arcsin\frac{u}{a}+C, \qquad a\neq 0, \qquad u\in(-a,\ a)$

$6^0.\ \int a^u u'\,dx = \frac{1}{\ln a}a^u+C \qquad a>0, \qquad a\neq 1$

$7^0.\ \int e^u u'\,dx = e^u+C$

$8^0.\ \int \sin u\cdot u'dx = -\cos u+C$

$9^0.\ \int \cos u\cdot u'\,dx = \sin u+C$

$10^0.\ \int \operatorname{tg} u\cdot u'\,dx = -\ln|\cos u|+C$

$11^0.\ \int \operatorname{ctg} u\cdot u'\,dx = \ln|\sin u|+C$

$12^0.\ \int \frac{u'}{\sin u}\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right|+C$

$13^0.\ \int \frac{u'}{\cos u}\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$

$14^0.\ \int \frac{u'}{\cos^2 u}\,dx = \operatorname{tg} u+C$

$15^0.\ \int \frac{u'}{\sin^2 u}\,dx = -\operatorname{ctg} u+C$

$16^0.\ \int \frac{u'}{\sqrt{u^2+a^2}}\,dx = \ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)+C.$

Următoarea teoremă, care exprimă a *doua formulă de schimbare de variabilă*, ne dă posibilitatea să calculăm integrale ale funcțiilor compuse.

Teoremă. *Dacă $f(t)$ e continuă pe intervalul J, iar $u(x)$ e strict monotonă pe intervalul I; dacă inversa v a lui $u(x)$, $v=u^{-1}: J\to I$ are derivata v' continuă pe J, și dacă $a,\ b\in I$, atunci*

$$\int_a^b f[u(x)]\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\cdot v'(t)\,dt.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu ipotezele teoremei :

$t=u(x) : I \to J$ e strict monotonă pe I.

$u^{-1}=v(t) : J \to I$ are derivata v' continuă pe J,

$f=f(t) : J \to R$ e continuă pe J,

rezultă că $f[u(x)] : I \to R$ e continuă pe I și are o primitivă $F(x) : I \to R$, adică $F'(x)=f[u(x)]$, $x \in I$; de asemenea, funcția $H(t)=F(v(t)) : J \to R$ e derivabilă pe J (întrucît F și $v(t)$ sînt derivabile) și dat fiind faptul că $F'(x)=f[u(x)]$ și că u și v sînt funcții inverse, $u(v(t))=t$, avem

$$H'(t)=F'(v(t)) \cdot v'(t)=f[u(v(t))]\, v'(t)=f(t)\, v'(t)$$

și $H(t)$ e o primitivă a funcției $f(t)\, v'(t)$. Rezultă deci că

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\, v'(t)\, dt = H(t)\Big|_{u(a)}^{u(b)} = F(v(t))\Big|_{u(a)}^{u(b)} = F[v(u(b))] -$$

$$-F[v(u(a))]=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b = \int_a^b f[u(x)]\, dx.$$

Egalitatea

$$\int_a^b f[u(x)]\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\, v'(t)\, dt \tag{1.26}$$

e a doua formulă de schimbare de variabilă în integrala definită.

Practic, pentru a calcula $\int f[u(x)]\, dx$ se fac înlocuirile $u(x)=t$, $dx=v'(t)dt$, $v'(t)$ fiind derivata funcției $v=u^{-1}(t)$; limitele de integrare a și b se înlocuiesc respectiv cu $t_1=u(a)$ și $t_2=u(b)$.

Se obține :

$$\int f[u(x)]\, dx = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, v'(t)\, dt.$$

Aplicație. Să se calculeze $I=\int_0^1 \sqrt{x(\sqrt{x}+1)}\, dx$.

Integrala se scrie

$$I=\int_0^1 \sqrt{x}\, \sqrt{\sqrt{x}+1}\, dx$$

și facem substituția $\sqrt{\sqrt{x}+1}=t$, din care, luînd pe $x=0$ și $x=1$ aflăm limitele de integrare $t_1=1$ și $t_2=\sqrt{2}$. Din substituție deducem

$$x=(t^2-1)^2,\ dx=4t(t^2-1)\, dt.$$

Facem înlocuirile și obținem

$$I=\int_1^{\sqrt{2}} t\cdot(t^2-1)\cdot 4t(t^2-1)\, dt = \int_1^{\sqrt{2}} (4t^6-8t^4+4t^2)\, dt =$$

$$=\left(\frac{4}{7}t^7-\frac{8}{5}t^5+\frac{4}{3}t^3\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{88}{105}\sqrt{2}-\frac{32}{105}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru calculul primitivelor, în formula (1.26) se ia una din limitele de integrare variabilă și se obține

$$\int_a^x f[u(x)]\,dx=\int_{u(a)}^{u(x)} f(t)\,v'(t)\,dt.$$

Rezultă că integrala nedefinită se va exprima cu ajutorul egalității

$$\int f[u(x)]\,dx=\int f(t)\,v'(t)\,dt,$$

în care $u(x)=t$ și $v(t)=u^{-1}$.

Aplicații. Să se calculeze:

a) $$I=\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx,\ x\geqslant 0.$$

Din substituția $\sqrt{x}=t$ deducem $x=t^2$, $dx=2tdt$. Făcînd înlocuirile obținem

$$I=\int\frac{1}{1+t}2tdt=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2\ [t-\ln\ (1+t)]+C=$$

$$=2\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})^2+C.$$

b) $$I=\int\frac{x}{\sqrt{1-x}},\quad x<1.$$

Din substituția $\sqrt{1-x}=t$ deducem $x=1-t^2$, $dx=-2tdt$. Facem înlocuirile și obținem

$$I=\int\frac{1-t^2}{t}(-2t)\,dt=-2\int(1-t^2)\,dt=-2\left(t-\frac{t^3}{3}\right)+C=$$

$$=2t\left(\frac{t^2}{3}-1\right)+C=2\sqrt{1-x}\left(\frac{1-x}{3}-1\right)+C.$$

c) $$I=\int\frac{dx}{\sin x},\quad -\pi<x<\pi,\quad x\neq 0.$$

Din substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ aflăm $x=2\operatorname{arctg} t$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ și cum

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$I=\int\frac{1+t^2}{2t}\,\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

1.8.3. INTEGRARE PRIN RECURENȚĂ

Metoda constă în deducerea unor formule care, folosite succesiv, dau posibilitatea calculului unor integrale de un anumit tip.

Pentru ilustrare vom prezenta cîteva exemple :

a) $$I_n=\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, \quad n\in N,\ n\geqslant 2.$$

Vom scrie

$$I_n=\frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx=\frac{1}{a^2}\left[\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}-\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{a^2}\,[I_{n-1}-J], \qquad J=\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}\,dx.$$

Integrala J o calculăm prin părți. Alegem părțile

$$v=x, \qquad u'=x\,(x^2+a^2)^{-n}.$$

Rezultă

$$v'=1, \quad u=\frac{-1}{2\,(n-1)\,(x^2+a^2)^{n-1}}$$

și

$$J=\frac{-x}{2\,(n-1)\,(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{2\,(n-1)}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}=$$

$$=\frac{-x}{2\,(n-1)\,(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{2\,(n-1)}\,I_{n-1},$$

iar

$$I_n=\frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{2\,(n-1)\,(x^2+a^2)^{n-1}}+\left(1-\frac{1}{2n-2}\right)I_{n-1}\right].$$

Obținem astfel formula de recurență

$$(1.27) \qquad I_n=\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{2\,(n-1)\,(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2\,(n-1)}\,I_{n-1}\right],$$

din care, dacă cunoaștem integrala I_{n-1} putem afla integrala I_n.

Astfel, făcînd în (1.27) $n=1$ determinăm pe

$$I_2=\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{2\,(x^2+a^2)}+\frac{1}{2}\,I_1\right],$$

cum

$$I_1=\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C_1,$$

rezultă

$$I_2=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right]+C.$$

Odată aflat I_2, făcînd în (1.27) pe $n=3$ obținem I_3, etc.
Analog se deduce formula de recurență

$$J_n=\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^n}=-\frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)}J_{n-1}\right] \tag{1.28}$$

Formula de recurență (1.28) se mai poate obține din formula (1.27) în care îl înlocuim pe a^2 cu $-a^2$.

b) $$I_n=\int\operatorname{tg}^n x\,dx, \qquad n\in N, \qquad n\geqslant 2.$$

Scriem integrala sub forma

$$I_n=\int\operatorname{tg}^{n-2}x\cdot\operatorname{tg}^2 x\,dx=\int\operatorname{tg}^{n-2}x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$$

$$=\int\operatorname{tg}^{n-2}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int\operatorname{tg}^{n-2}x\,dx=\int\operatorname{tg}^{n-2}x\,(\operatorname{tg}x)'\,dx-I_{n-2}.$$

Avînd în vedere (1.25′), rezultă

$$I_n=\int\operatorname{tg}^n x dx=\frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1}x-I_{n-2}. \tag{1.29}$$

Cum

$$I_0=\int dx=x+C,$$

facem în (1.29) pe $n=2$ și obținem

$$I_2=\int\operatorname{tg}^2 x dx=\operatorname{tg}x-I_0=\operatorname{tg}x-x+C.$$

Odată cunoscut I_2, luînd în (1.29) pe $n=3$ putem determina pe I_3 etc.

1.9. INTEGRAREA FRACȚIILOR RAȚIONALE

În cadrul acestui paragraf ne propunem să prezentăm modul de calcul al integralelor de forma

$$\int R(x)\,dx$$

unde $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ $(Q(x)\neq 0)$, $P(x)$ și $Q(x)$ fiind polinoame.

Scanned with OKEN Scanner

Putem presupune că gradul polinomului $P(x)$ e inferior gradului polinomului $Q(x)$, pentru că altfel, s-ar efectua operația de împărțire și s-ar obține

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{P^*(x)}{Q(x)}.$$

Cum $C(x)$ e un polinom, integrarea lui fiind cunoscută, rămîne ca problemă integrarea fracției raționale $\frac{P^*(x)}{Q(x)}$, în care gradul numărătorului este mai mic decît gradul numitorului.

Se demonstrează următoarea:

Teoremă. *O funcție rațională* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *admite o descompunere unică în elemente (fracții) simple.*

Înțelegem prin elemente simple funcții de forma:

$$(1.31) \qquad \frac{A}{(x-x_0)^n}, \quad \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n}, \text{ unde } x_0 \in R,\ n \in N,\ b^2-4ac<0.$$

Din demonstrația teoremei rezultă și modul de descompunere a fracției $\frac{P(x)}{Q(x)}$ în fracții simple:

Se calculează rădăcinile polinomului $Q(x)$. Ele determină fracțiile simple în care se descompune fracția $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Anume:

— Dacă x_0 e o rădăcină simplă, în descompunerea fracției $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ea generează o singură fracție simplă, fracția

$$\frac{A_1}{x-x_0}.$$

— Dacă x_0 e o rădăcină multiplă de ordinul n, în descompunerea lui $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ea generează o sumă de n fracții simple

$$\frac{A_n}{(x-x_0)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-x_0)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-x_0}.$$

— Dacă $Q(x)$ are rădăcina complexă $\alpha+i\beta$, $Q(x)$ va avea și rădăcina $\alpha-i\beta$. și dacă notăm cu ax^2+bx+c trinomul cu rădăcinile $\alpha+i\beta$, atunci aceste rădăcini generează în expresia lui $\frac{P(x)}{Q(x)}$ fracția

$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}.$$

— Dacă $\alpha+i\beta$ e rădăcină multiplă de ordinul m, atunci expresia lui $\frac{P(x)}{Q(x)}$ va conține o sumă de m fracții simple

$$\frac{B_mx+C_m}{(ax^2+bx+c)^m} + \frac{B_{m-1}x+C_{m-1}}{(ax^2+bx+c)^{m-1}} + \ldots + \frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a determina coeficienții A_i, B_i, C_i se adună fracțiile și se identifică numărătorul cu polinomul $P(x)$. Se va obține un sistem de ecuații liniare din care se determină coeficienții de la numărătorul fracțiilor cu care se exprimă descompunerea lui $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Observație. Dacă x_0 e rădăcină simplă, putem determina numărătorul fracției $\frac{A_1}{x-x_0}$ înmulțind expresia de descompunere în fracții simple cu $x-x_0$ și dînd lui x valoarea x_0.

Dacă x_0 este rădăcină multiplă de ordinul n, în mod analog, prin înmulțire cu $(x-x_0)^n$ se obține numărătorul A_n a fracției simple $\frac{A_n}{(x-x_0)^n}$.

Deci, anterior aplicării metodei coeficienților nedeterminați, putem afla o parte din coeficienții necunoscuți, obținînd astfel un sistem cu mai puține necunoscute.

Din cele arătate, rezultă că problema calculului integralei $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ se reduce la integrarea fracțiilor de tipul (1.31), lucru posibil întotdeauna, așa cum se arată ,mai jos :

1) $\int \frac{dx}{x-x_0} = \ln|x-x_0| + K$

2) $\int \frac{dx}{(x-x_0)^n} = \frac{-1}{(n-1)(x-x_0)^{n-1}} + K, \qquad n \geqslant 2.$

3) În calculul integralei $\int \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$, $b^2-4ac<0$, ilustrăm în prealabil cazurile particulare sub care integrala poate apare :

a) $\int \frac{Bx+C}{x^2+a^2}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+a^2} + C\int \frac{dx}{x^2+a^2} =$

$$= \frac{B}{2}\ln(x^2+a^2) + \frac{C}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + K.$$

b) $\int \frac{Bx+C}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x\,dx}{(x^2+a^2)^n} + C\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} =$

$$= \frac{-B}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + C\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, \quad n \geqslant 2.$$

Integrala rămasă se calculează cu formula de recurență (1.27).
În cazul general

$$I = \int \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx, \quad n \in N, \quad b^2-4ac<0,$$

se aduce la o formă particulară prin descompunerea numitorului într-o sumă de pătrate :

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + k^2\right],$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $k^2=\frac{4ac-b^2}{4a^2}>0$, astfel că integrala devine

$$I=\int \frac{Bx+C}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k^2\right]^n}\,dx.$$

Făcînd substituţia $z=x+\frac{b}{2a}$, deci $x=z-\frac{b}{2a}$, rezultă $dx=dz$ şi integrala se scrie sub forma

$$I=\int \frac{Bz+\left(C-\frac{Bb}{2a}\right)}{a\,(z^2+k^2)^n}\,dz,\quad z=x+\frac{b}{2a},$$

pe care am prezentat-o mai sus.

Problema calculului integralei $\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ este astfel rezolvată, integrala exprimîndu-se printr-o sumă de funcţii raţionale, de funcţii logaritmice şi de funcţii arctg.

Aplicaţie. Să se calculeze integralele:

a) $$I=\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+2)(x+1)}.$$

Integrala se calculează pe un interval ce nu conţine punctele 1 ; -1 ; -2.

Descompunem integrantul în fracţii simple:

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+1}.$$

Numitorul avînd numai rădăcini reale, simple, putem determina numărătorii fracţiilor direct, fără a mai aplica metoda coeficienţilor nedeterminaţi.

Pentru aceasta înmulţim egalitatea succesiv cu $x-1$, $x+2$, $x+1$ făcînd în rezultat respectiv pe $x=1$, $x=-2$, $x=-1$. Obţinem

$$A=\frac{1}{6},\quad B=-\frac{2}{3},\quad C=\frac{1}{2}.$$

şi

$$I=\int\left[\frac{1}{6(x-1)}-\frac{2}{3(x+2)}+\frac{1}{2(x+1)}\right]dx=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x-1)(x+1)^3}{(x+2)^4}\right|+K.$$

b) $$I=\int \frac{x+3}{x(x-1)^3}\,dx.$$

Integrala se calculează pe un interval ce nu conţine punctele zero şi unu.

Descompunem integrantul în fracţii simple

$$\frac{x+3}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înmulțim egalitatea succesiv cu x și $(x-1)^3$. Făcînd în rezultat respectiv pe $x=0$ și $x=1$, obținem $A=-3$, $B=4$, încît

$$\frac{x+3}{x(x-1)^3}=\frac{-3}{x}+\frac{4}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

Din această egalitate determinăm pe C și D prin metoda coeficienților nedeterminați. Însumînd fracțiile rezultă

$$\frac{x+3}{x(x-1)^3}=\frac{(D-3)x^3+(C-2D+9)x^2+(D-C-5)x+3}{x(x-1)^3},$$

ar prin identificarea coeficienților deducem condițiile

$$\begin{cases} D-3=0 \\ C-2D+9=0 \\ -C+D-5=1, \end{cases}$$

care sînt satisfăcute pentru $D=3$ și $C=-3$, astfel că

$$I=-3\int\frac{dx}{x}+4\int\frac{dx}{(x-1)^3}-3\int\frac{dx}{(x-1)^2}+3\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=-3\ln|x|-2\frac{1}{(x-1)^2}+3\frac{1}{x-1}+3\ln|x-1|+K=$$

$$=\ln\left|\left(\frac{x-1}{x}\right)^3\right|+\frac{3x-5}{(x-1)^2}+K.$$

c) $$I=\int\frac{2x^2+2x+13}{(x^2+1)^2(x-2)}dx.$$

Integrala se calculează pe un interval ce nu conține punctul 2.

Descompunem integrantul în fracții simple :

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Prin însumare deducem egalitatea

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{(A+D)x^4+(E-2D)x^3+(2A+B+D-2E)x^2+(C-2B+E-2D)x+(A-2C-2E)}{(x-2)(x^2+1)^2},$$

care are loc dacă

$$\begin{cases} A\quad\quad+D\quad\quad=0 \\ \quad\quad\quad -2D+E=0 \\ 2A+B\quad+D-2E=2 \\ \quad -2B+C-2D+E=2 \\ A\quad\quad -2C\quad -2E=13. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aflăm $A=1$, $B=-3$, $C=-4$, $D=-1$, $E=-2$, astfel că

$$I=\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}dx-\int\frac{x+2}{x^2+1}dx=\ln|x-2|-$$

$$-\frac{3}{2}\int\frac{2xdx}{(x^2+1)^2}-4\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+1}-2\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\ln|x-2|+\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2\operatorname{arctg}x-4\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Integrala

$$I_2=\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

se calculează cu formula de recurență (1.27):

$$I_2=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}I_1=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+K.$$

Făcînd înlocuirea obținem

$$I=\frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1}+\frac{3-4x}{2(x^2+1)}-4\operatorname{arctg}x+K.$$

Se putea determina numărătorul A, direct, înmulțind relația de descompunere în fracții simple cu $x-2$ și dînd în rezultat lui x valoarea 2, urmînd ca apoi, cu A determinat, să se aplice metoda coeficienților nedeterminați.

§ 1.10. INTEGRALE REDUCTIBILE LA INTEGRALE DE FUNCȚII RAȚIONALE

1.10.1. INTEGRALE DIN FUNCȚII EXPONENȚIALE

Ne propunem să calculăm integrale de forma

$$I=\int R(e^{ax})\,dx,\qquad a\neq 0,$$

unde $R(u)=\frac{P(u)}{Q(u)}$ este o funcție rațională.

Integrala se reduce la o integrală rațională în t prin substituția

$$e^{ax}=t$$

Într-adevăr,

$$x=\frac{1}{a}\ln t,\qquad dx=\frac{1}{at}dt.$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

și făcînd înlocuirile obținem

$$I=\int R(t)\frac{1}{at}\,dt=\int R_1(t)\,dt,$$

unde $R_1(t)$ e o funcție rațională în t. În rezultat se înlocuiește t cu e^{ax}.

Aplicație. Să se calculeze

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx.$$

Facem substituția $e^{2x}=t$, din care deducem

$$x=\frac{1}{2}\ln t,\qquad dx=\frac{1}{2t}\,dt$$

Pentru $x=0$ și $x=\frac{1}{2}$, din substituție, se obțin respectiv valorile $t_1=1$, $t_2=e$, încît

$$I=\int_1^e\frac{t}{1+t}\,\frac{1}{2t}\,dt=\frac{1}{2}\ln(1+t)\Big|_1^e=\frac{1}{2}[\ln(e+1)-\ln 2]=\ln\sqrt{\frac{e+1}{2}}.$$

1.10.2. INTEGRALE DIN FUNCȚII TRIGONOMETRICE

Numim integrale trigonometrice integralele de forma

$$\int_{x_1}^{x_2}R(\sin x,\cos x)\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{P(\sin x,\cos x)}{Q(\sin x,\cos x)}\,dx,$$

în care R este o expresie (funcție) rațională în $\sin x$ și $\cos x$.

Pentru ca integrala să aibă sens se impune condiția

$$Q(\sin x,\cos x)\neq 0,\qquad \forall x\in[x_1,x_2].$$

În cele ce urmează vom expune metoda de calcul a integralelor nedefinite din funcții trigonometrice, prin care acestea se transformă în integrale din fracții raționale.

A. Cazul general. Se face substituția

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\qquad (x=2\operatorname{arctg} t).$$

Rezultă

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2} \tag{1.32}$$

și integrala

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$$

se transformă într-o integrală rațională în variabila t. După integrare se face înlocuirea $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Exemplu. În cazul integralei definite

$$I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x+1},$$

prin substituția indicată limitele de integrare vor fi $t_1=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $t_2=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$ și cu (1.32)

$$I=\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}=\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln(1+t)\Big|_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}=$$

$$=\ln 2-\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\ln\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}.$$

B. Cazuri particulare :

1) $R(\sin x, \cos x)$ *e impară prin raport cu sin* x, adică

(1.33) $$R(-\sin x, \cos x)=-R(\sin x, \cos x).$$

În acest caz se face substituția

$$\cos x=t$$

și integrala

$$I=\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$$

se transformă într-o integrală dintr-o fracție rațională în t.

Într-adevăr, din condiția (1.33) rezultă că

$$R(\sin x, \cos x)=\sin x\, R_1(\sin^2 x, \cos x)$$

și

$$I=\int R_1(\sin^2 x, \cos x).\ \sin x\,\mathrm{d}x=-$$

$$=-\int R_1(1-\cos^2 x, \cos x)(\cos x)'\mathrm{d}x,$$

încît cu substituția $\cos x=t$, vezi (1.25′)

$$I=-\int R_1(1-t^2, t)\,\mathrm{d}t,\quad t=\cos x$$

este o integrală dintr-o fracție rațională în t.

Exemplu. În integrala

$$I=\int \frac{\cos x}{\sin x+\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x,$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. În cazul integralei definite

$$I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x+\cos x+1},$$

prin substituția indicată limitele de integrare vor fi $t_1=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $t_2=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$ și cu (1.32)

$$I=\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}=\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{dt}{1+t}=\ln(1+t)\Big|_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}=$$

$$=\ln 2-\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\ln\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}.$$

B. Cazuri particulare :

1) $R(\sin x, \cos x)$ *e impară prin raport cu sin* x, adică

(1.33) $$R(-\sin x, \cos x)=-R(\sin x, \cos x).$$

În acest caz se face substituția

$$\cos x=t$$

și integrala

$$I=\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

se transformă într-o integrală dintr-o fracție rațională în t.

Într-adevăr, din condiția (1.33) rezultă că

$$R(\sin x, \cos x)=\sin x\, R_1(\sin^2 x, \cos x)$$

și

$$I=\int R_1(\sin^2 x, \cos x).\ \sin x\,dx=-$$

$$=-\int R_1(1-\cos^2 x, \cos x)(\cos x)'dx,$$

încît cu substituția $\cos x=t$, vezi (1.25′)

$$I=-\int R_1(1-t^2, t)\,dt,\quad t=\cos x$$

este o integrală dintr-o fracție rațională în t.

Exemplu. În integrala

$$I=\int \frac{\cos x}{\sin x+\sin x\cos x}\,dx,$$

Scanned with OKEN Scanner

funcția

$$R(\cos x,\ \sin x)=\frac{\cos x}{\sin x+\sin x\cos x}$$

e impară prin raport cu $\sin x$ deoarece

$$R(\cos x,\ -\sin x)=\frac{\cos x}{-\sin x-\sin x\cos x}=-\frac{\cos x}{\sin x+\sin x\cos x}=-R(\cos x,\ \sin x)$$

astfel că în integrala

$$I=\int\frac{\cos x}{\sin^2 x\ (1+\cos x)}\sin x\ dx$$

vom efectua substituția $\cos x=t$. Cum $-\sin x\,dx=dt$, obținem

$$I=-\int\frac{t}{(1-t^2)\ (1+t)}dt=\int\frac{t}{(t+1)^2\ (t-1)}dt$$

o integrală dintr-o fracție rațională în t pe care o descompunem în fracții simple

$$\frac{t}{(t+1)^2\ (t-1)}=\frac{A}{(t+1)^2}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{t-1}. \tag{1.34}$$

Înmulțim această egalitate succesiv cu $(t+1)^2$ și $t-1$ și dăm lui t valoarea -1, respectiv $+1$. Rezultă $A=\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{4}$.

Dacă în identitatea (1.34) dăm lui t valoarea zero obținem egalitatea $A+B-C=0$, din care aflăm $B=\frac{3}{4}$, și

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t+1)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}+\frac{3}{4}\ln|t+1|+\frac{1}{4}\ln|t-1|+K=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|(t+1)^3\ (t-1)|-\frac{1}{2(t+1)}+K,\quad t=\cos x.$$

2) $R(\sin x,\ \cos x)$ *e impară prin raport cu* $\cos x$, adică

$$R(\sin x,\ -\cos x)=-R(\sin x,\ \cos x). \tag{1.35}$$

În acest caz se face substituția

$$\sin x=t$$

și integrala

$$I=\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx$$

se transformă într-o integrală dintr-o fracție rațională în t.

Într-adevăr, din condiția (1.35) rezultă că

$$R(\sin x,\ \cos x)=\cos x\ R_1(\sin x,\ \cos^2 x)$$

şi

$$I=\int R_1(\sin x,\ \cos^2 x)\cos x\,dx=$$

$$=\int R_1(\sin x,\ 1-\sin^2 x)\,(\sin x)'\,dx.$$

Cu substituţia $\sin x=t$, vezi (1.25'),

$$I=\int R_1(t,\ 1-t^2)\,dt$$

Obţinem deci o integrală dintr-o fracţie raţională în t.

Exemplu. În cazul integralei

$$I=\int\frac{\sin x+1}{\cos x}\,dx$$

funcţia

$$R(\sin x,\cos x)=\frac{\sin x+1}{\cos x}$$

e impară prin raport cu $\cos x$ deoarece

$$R(\sin x,-\cos x)=\frac{\sin x+1}{-\cos x}=-\frac{\sin x+1}{\cos x}=$$

$$=-R(\sin x,\ \cos x).$$

Cu substituţia $\sin x=t$ $(dt=\cos x\,dx)$ integrala

$$I=\int\frac{\sin x+1}{\cos x}\,dx=\int\frac{\sin x+1}{\cos^2 x}\cos x\,dx$$

devine

$$I=\int\frac{t+1}{1-t^2}\,dt=\int\frac{dt}{1-t}=-\ln|1-t|+K=$$

$$=-\ln(1-\sin x)+K.$$

3) $R(\sin x,\cos x)$ *e pară prin raport cu* $\sin x$ *şi* $\cos x$, adică

(1.36) $$R(-\sin x,\ -\cos x)=R(\sin x,\ \cos x).$$

În acest caz se face substituţia

$$\operatorname{tg} x=t$$

şi integrala

$$I=\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx$$

se transformă într-o integrală dintr-o fracţie raţională în t.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, din condiția (1.36) rezultă că

$$R(\sin x,\ \cos x)=R_1(\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ \sin x\cos x)$$

și

$$I=\int R_1(\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ \sin x\cos x)\,dx.$$

Cu substituția $\operatorname{tg} x=t$ ($x=\operatorname{arctg} t$), avem

$$\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\qquad \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}$$

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{t}{1+t^2},\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

și integrala

$$I=\int R_1\left(\frac{t^2}{1+t^2},\ \frac{1}{1+t^2},\ \frac{t}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt,$$

este exprimată printr-o integrală dintr-o fracție rațională în t.

Exemplu. În cazul integralei

$$I=\int\frac{\sin^2 x+1}{\sin x\cos x+\frac{1}{2}}\,dx$$

funcția

$$R(\sin x,\ \cos x)=\frac{\sin^2 x+1}{\sin x\cos x+\frac{1}{2}}$$

este pară prin raport cu $\sin x$ și $\cos x$ deoarece

$$R(-\sin x,\ -\cos x)=\frac{\sin^2 x+1}{\sin x\cos x+\frac{1}{2}}=R(\sin x,\ \cos x).$$

Facem deci substituția $\operatorname{tg} x=t$ și integrala

$$I=\int\frac{\frac{t^2}{1+t^2}+1}{\frac{t}{1+t^2}+\frac{1}{2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=2\int\frac{2t^2+1}{(t+1)^2(t^2+1)}\,dt.$$

Descompunem integrantul în fracții simple

$$\frac{2t^2+1}{(t+1)^2(t^2+1)}=\frac{A}{(t+1)^2}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1}$$

și înmulțim egalitatea succesiv cu $(t+1)^2$ și (t^2+1). În expresiile obținute, dăm lui t respectiv valorile -1 și $i=\sqrt{-1}$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă

$$A=\frac{3}{2},\quad Ci+D=-\frac{1}{(i+1)^2}=-\frac{1}{2i}=\frac{i}{2}.$$

Identificînd, aflăm pe $C=\frac{1}{2}$, $D=0$, astfel că

$$\frac{2t^2+1}{(t+1)^2(t^2+1)}=\frac{3}{2(t+1)^2}+\frac{B}{t+1}+\frac{t}{2(t^2+1)}.$$

În această egalitate dăm lui t valoarea zero și obținem $B=-\frac{1}{2}$, încît

$$I=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{(t+1)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1}+\frac{1}{2}\int\frac{t}{t^2+1}=$$

$$=-\frac{3}{2}\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2}\left[-\ln|t+1|+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]+K=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{t^2+1}}{|t+1|}-\frac{3}{2}\frac{1}{t+1}+K=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{|\sin x+\cos x|}-\frac{3}{2}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}+K.$$

Observație. În calculul integralelor trigonometrice este util a constata dacă funcția $R(\sin x, \cos x)$ poate fi încadrată în unul din cazurile particulare prezentate deoarece intregrarea cu substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ (cazul general) conduce la o expresie rațională relativ complicată.

Astfel, rezolvînd ultima integrală cu metoda generală, vezi (1.32), obținem :

$$I=\int\frac{\sin^2x+1}{\sin x\cos x+\frac{1}{2}}dx=\int\frac{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}+1}{\frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}+\frac{1}{2}}\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$=4\int\frac{t^4+6t^2+1}{(t^2+1)(t^4-4t^3+2t^2+4t+1)}dt$$

o integrală mai complicată decît cea obținută făcînd substituția $\operatorname{tg}x=t$.

1.10.3. INTEGRALE DIN FUNCȚII IRAȚIONALE

Sînt acele integrale ale căror integrant conține variabila sub radical.

Vom prezenta cîteva tipuri de astfel de integrale care, prin substituții, se reduc la integrale raționale.

A. Integrale de forma

$$I=\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right]dx,$$

unde R e o expresie (o funcție) rațională în x și cele p fracții, iar $m_i, n_i\in N$, $i=1\div p$.

Scanned with OKEN Scanner

Făcînd substituția

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^r,$$

r fiind cel mai mic multiplu comun al numitorilor n_i, obținem

$$x=\frac{dt^r-b}{-ct^r+a},\quad dx=\frac{r\,(ad-bc)\,t^{r-1}}{(-ct^r+a)^2}\,dt$$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_i}{n_i}}=t^{r\cdot\frac{m_i}{n_i}}=t^{s_i},\quad s_i\in N,\ i=1\div p.$$

Prin înlocuiri integrala devine

$$I=\int R\left(\frac{dt^r-b}{-ct^r+a},\ t^{s_1},\ t^{s_2},\ \ldots,\ t^{s_p}\right)\frac{r\,(ad-bc)}{(-ct^r-a)^2}\,t^{r-1}dt,$$

o integrală dintr-o fracție rațională.

Cazuri particulare : 1) Dacă $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=1$ integrala I e de forma

$$\int R\,(x,\ x^{\frac{m_1}{n_1}},\ x^{\frac{m_2}{n_2}}\ \ldots\ x^{\frac{m_p}{n_p}})\,dx$$

și se calculează, conform celor arătate, făcînd substituția $x=t^r$.

2) Dacă $p=1$, integrala I e de forma

$$I=\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}\right)dx=\int R\left[x,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}\right]dx$$

și se calculează făcînd substituția

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n.$$

Exemple : a) Integrala

$$I=\int_{-\frac{7}{9}}^{0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)\,(x+1)^2}}\,dx,$$

are sens întrucît numitorul nu se anulează pe intervalul de integrare, iar radicalul, fiind de ordin impar, are sens și pentru numere negative.

Scriem integrala sub forma

$$I=\int_{-\frac{7}{9}}^{0}\frac{1}{(x+1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}}\,dx=\int_{-\frac{7}{9}}^{0}\frac{1}{x+1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}}dx$$

și facem substituția

$$\frac{x+1}{x-1}=t^3,$$

din care rezultă

$$x=\frac{t^3+1}{t^3-1},\quad dx=\frac{-6t^3}{(t^3-1)^2}\,dt.$$

În substituția făcută dăm lui x succesiv valorile $-\frac{7}{9}$ și zero și obținem limitele de integrare $t_1=-\frac{1}{2}$, $t_2=-1$, astfel că

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\frac{1}{\frac{2t^3}{t^3-1}}\cdot t\cdot\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\,dt=-3\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\frac{dt}{t^3-1}=$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt=\left(\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{-1}=$$

$$=\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\,\frac{\pi}{6}.$$

b) Scriem integrala

$$I=\int_{\frac{1}{64}}^{1}\frac{x-1}{x\,(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}\,dx$$

sub forma

$$I=\int_{\frac{1}{64}}^{1}\frac{x-1}{x\,(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}})}\,dx$$

și facem substituția

$$x=t^6,$$

din care aflăm limitele de integrare $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=1$ și diferențiala $dx=6t^5dt$, astfel că, făcînd înlocuirile, obținem

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{t^6-1}{t^6(t^3+t^4)}\,6t^5dt=6\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{(t^6-1)\,dt}{t^4(t+1)}=$$

$$=6\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{t^5-t^4+t^3-t^2+t-1}{t^4}\,dt=6\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4}\right)dt=$$

$$=6\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t|+\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{3t^3}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=-\frac{47}{4}+6\ln 2.$$

B. Integrale de forma

$$I=\int R\,(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$$

unde R este o expresie (funcție) rațională în x și $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Scanned with OKEN Scanner

Putem avea cazurile : 1) $a>0$. În acest caz se face substituția

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t$$

și obținem

$$x=\frac{t^2-c}{-2\sqrt{a}t+b},\ \mathrm{d}x=\frac{-2\sqrt{a}t^2+2bt-2\sqrt{a}c}{(-2\sqrt{a}t+b)^2}\mathrm{d}t,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t+\sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{-2\sqrt{a}t+b}.$$

Făcînd înlocuirile aflăm

$$I=\int R\left(\frac{t^2-c}{-2\sqrt{a}t+b},\ t+\sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{-2\sqrt{a}t+b}\right)\frac{-2\sqrt{a}t^2+2bt-2\sqrt{a}c}{(-2\sqrt{a}t+b)^2}\mathrm{d}t,$$

o integrală dintr-o funcție rațională în t.

În rezultat t se va înlocui cu $\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a}x$, așa cum rezultă din substituție.

2) $a<0$. În acest caz trinomul are rădăcini reale, pentru că altfel ar fi negativ pentru orice $x\in R$ și integrala nu ar avea sens.

Notînd cu α și β rădăcinile trinomului

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)},$$

cu substituția

$$\sqrt{a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)}=t\,(x-\alpha)$$

rezultă

$$x=\frac{at^2-a\beta}{t^2-a},\ \mathrm{d}x=\frac{2a\,(\beta-\alpha)\,t}{(t^2-a)^2}\mathrm{d}t$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\left(\frac{at^2-a\beta}{t^2-a}-\alpha\right)=\frac{a\,(\alpha-\beta)\,t}{t^2-a}.$$

Prin înlocuiri obținem

$$I=\int R\left(\frac{at^2-a\beta}{t^2-a},\ \frac{a\,(\alpha-\beta)\,t}{t^2-a}\right)\frac{2a\,(\beta-\alpha)\,t}{(t^2-a)^2}\mathrm{d}t,$$

o integrală dintr-o funcție rațională în t.

În rezultatul integrării t se va înlocui cu

$$\frac{\sqrt{a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)}}{x-\alpha}.$$

Substituțiile indicate rezolvă toate cazurile de integrale considerate. Putem da însă încă o substituție :

3) Dacă $c>0$, cu substituția

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx+\sqrt{c}$$

Scanned with OKEN Scanner

avem

$$x=\frac{2\sqrt{c}t-b}{-t^2+a},\quad dx=\frac{2\sqrt{c}t^2-2bt+2a\sqrt{c}}{(-t^2+a)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{(2\sqrt{c}t-b)\,t}{-t^2+a}+\sqrt{c}.$$

Prin înlocuiri obținem

$$I=\int R\left(-\frac{2\sqrt{c}t-b}{t^2-a},\ -\frac{(2\sqrt{c}t-b)\,t}{t^2-a}+\sqrt{c}\right)\frac{2\sqrt{c}t^2-2bt+2a\sqrt{c}}{(t^2-a)^2}\,dt$$

o integrală dintr-o funcție rațională în t.

În rezultatul integrării t se va înlocui cu $\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}$.

Exemple : a) $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Integrala se încadrează în cazul 1) și 3). Cum $\sqrt{c}=\sqrt{2}$ e o valoare irațională, preferăm să calculăm integrala cu substituția de la cazul 1) :

$$\sqrt{x^2+2x+2}=\sqrt{1}\,x+t,$$

cu care

$$x=-\frac{t^2-2}{2(t-1)},\quad dx=-\frac{t^2-2t+2}{2(t-1)^2}\,dt$$

$$\sqrt{x^2+2x+2}=\frac{-t^2+2}{2(t-1)}+t=\frac{t^2-2t+2}{2(t-1)}.$$

Prin înlocuiri obținem

$$I=\int\frac{dt}{t^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+K,\quad t=\sqrt{x^2+2x+2}-x.$$

b) $$I=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{-x^2-x+2}}.$$

Trinomul $-x^2-x+2$ are rădăcini reale : -2 și 1, încît vom face substituția

$$\sqrt{-(x-1)(x+2)}=t(x-1)$$

cu care

$$x=\frac{t^2-2}{t^2+1},\quad dx=\frac{6t}{(t^2+1)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{-x^2-x+2}=t\left(\frac{t^2-2}{t^2+1}-1\right)=\frac{-3t}{t^2+1}.$$

Prin înlocuiri obținem

$$I=\int\frac{\frac{t^2-2}{t^2+1}}{\frac{-3t}{t^2+1}}\,\frac{6t}{(t^2+1)^2}\,dt=-2\int\frac{t^2-2}{(t^2+1)^2}\,dt=-2\int\frac{dt}{t^2+1}+6\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu formula de recurență (1.27) aflăm

$$I_2=\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t+K_1,$$

astfel că

$$I=-2\operatorname{arctg} t+\frac{3t}{t^2+1}+3\operatorname{arctg} t+6K_1=\frac{3t}{t^2+1}+\operatorname{arctg} t+K.$$

Integrala dată se încadrează în cazul 3), cazul $c>0$, încît se poate calcula și cu substituția

$$\sqrt{-x^2-x+2}=\sqrt{2}+tx.$$

C. Integrale binoame sînt integralele de forma

$$I=\int x^m(ax^n+b)^p\,dx, \tag{1.37}$$

în care m, n și p sînt numere raționale, iar a și b constante.

În integrala I se poate considera $n>0$, întrucît dacă $n<0$ integrala se poate pune sub forma

$$I=\int x^{m+np}(a+bx^{-n})^p\,dx=\int x^{m_1}(bx^{n_1}+a)^p\,dx,$$

în care $m+np=m_1$, $n_1=-n>0$ și p sînt raționali. Am obținut deci o integrală de tipul integralei (1.37) în care $n_1>0$.

Dacă în integrala (1.37) facem substituția

$$x=t^s, \tag{1.38}$$

s fiind cel mai mic multiplu comun al numitorilor lui m și n, se obține integrala

$$I=s\int t^{sm}(at^{sn}+b)^p t^{s-1}\,dt=s\int t^{s_1}(at^{s_2}+b)^p t^{s-1}\,dt=s\int t^{s+s_1-1}(at^{s_2}+b)^p\,dt,$$

în care $s+s_1-1$ și s_2 sînt întregi ($s_2>0$).

Deci, prin substituția (1.38), o integrală binoamă poate fi exprimată sub forma (1.37), în care m și n sînt întregi ($n>0$), iar p rațional.

Matematicianul rus Cebîșev a demonstrat că integralele binoame pot fi exprimate cu ajutorul funcțiilor elementare numai în trei cazuri :

1) $p=$ întreg. În acest caz, cu substituția (1.38), integrala binoamă se aduce la forma (1.37), cu m și n întregi ; obținem deci o integrală de funcție rațională.

2) $p=\frac{q}{r}$ și $\frac{m+1}{n}=$ întreg. În acest caz, cu substituția

$$ax^n+b=t^r \tag{1.39}$$

avem

$$x=\left(\frac{t^r-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}},\qquad dx=\frac{r}{na}\left(\frac{t^r-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}t^{r-1}\,dt.$$

Prin înlocuiri, integrala (1.37) devine

$$I=\frac{r}{na}\int\left(\frac{t^r-b}{a}\right)^{\frac{m}{n}}t^q\left(\frac{t^r-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}t^{r-1}\,dt=\frac{r}{na}\int\left(\frac{t^r-b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}t^{q+r-1}\,dt$$

o integrală de funcție rațională.

3) $p=\frac{q}{r}$ și $\frac{m+1}{n}+\frac{q}{r}=$ întreg. În acest caz, cu substituția

$$\frac{ax^n+b}{x^n}=t^r \tag{1.40}$$

avem

$$x=\left(\frac{t^r-a}{b}\right)^{-\frac{1}{n}},\quad ax^n+b=t^r\left(\frac{t^r-a}{b}\right)^{-1},\quad dx=-\frac{r}{nb}\left(\frac{t^r-a}{b}\right)^{-\frac{1}{n}-1}t^{r-1}\,dt$$

și prin înlocuiri, integrala (1.37) devine

$$I=-\frac{r}{nb}\int\left(\frac{t^r-a}{b}\right)^{-\frac{m}{n}}t^q\left(\frac{t^r-a}{b}\right)^{-\frac{q}{r}}\left(\frac{t^r-a}{b}\right)^{-\frac{1}{n}-1}t^{r-1}\,dt=$$

$$=-\frac{r}{nb}\int t^{q+r-1}\left(\frac{b}{t^r-a}\right)^{\frac{m+1}{n}+\frac{q}{r}}\,dt$$

o integrală de funcție rațională.

Observație. Integrala definită $\int_{x_1}^{x_2}x^m(ax^n+b)^{\frac{q}{r}}dx$ cu m, n, q, r întregi ($r>0$), prin substituțiile indicate se transformă într-o integrală de funcție rațională care are sens cînd:

α) $ax^n+b\geqslant 0$ pentru orice $x\in[x_1, x_2]$, dacă r este par,

β) $ax^n+b\neq 0$ pentru orice $x\in[x_1, x_2]$, dacă $q<0$,

γ) $0\notin[x_1, x_2]$ dacă $m<0$.

Exemple. a) Integrala

$$I=\int_1^{16}\frac{\sqrt[3]{x+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

se pune sub forma

$$I=\int_1^{16}x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{4}}+1)^{\frac{1}{3}}dx,$$

a unei integrale binoame cu $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=\frac{q}{r}=\frac{1}{3}$, în care $\frac{m+1}{n}=2=$ întreg, astfel că vom face substituția (1.39) $x^{\frac{1}{4}}+1=t^3$. Rezultă $x=(t^3-1)^4$, $dx=12t^2\,(t^3-1)^3\,dt$.

Cum $t=\sqrt[3]{x^{\frac{1}{4}}+1}$, dînd lui x succesiv valorile 1 și 16 aflăm limitele de integrare $t_1=\sqrt[3]{2}$, $t_2=\sqrt[3]{3}$ și făcînd înlocuirile obținem

$$I=\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}}(t^3-1)^{-2}\cdot t\cdot 12t^2(t^3-1)\,dt=12\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}}t^3(t^3-1)\,dt=$$

$$=12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}}=\frac{45}{7}\sqrt[3]{3}-\frac{6}{7}\sqrt[3]{2}.$$

b) Integrala

$$I=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{5x^4+1}}$$

se pune sub forma

$$I=\int x(5x^4+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx,$$

a unei integrale binoame cu $m=1$, $n=4$, $p=\frac{q}{r}=-\frac{1}{2}$, în care $\frac{m+1}{n}=\frac{1}{2}$ este neîntreg, dar $\frac{m+1}{n}+\frac{q}{r}=0$ este întreg, încît vom face substituția (1.40) $\frac{5x^4+1}{x^4}=t^2$.

Rezultă

$$x=(t^2-5)^{-\frac{1}{4}},\quad 5x^4+1=t^2(t^2-5)^{-1},\quad dx=-\frac{1}{2}(t^2-5)^{-\frac{5}{4}}t\,dt$$

și făcînd înlocuirile obținem

$$I=-\frac{1}{2}\int(t^2-5)^{-\frac{1}{4}}t^{-1}(t^2-5)^{\frac{1}{2}}(t^2-5)^{-\frac{4}{5}}t\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-5}=-\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right|+K,\quad t=\frac{\sqrt{5x^4+1}}{x^2}.$$

c) Integrala

$$I=\int_1^{32}x^{-\frac{7}{6}}(x^{\frac{1}{6}}-1)^2\,dx$$

este o integrală binoamă în care $p=2=$ întreg, astfel că vom face substituția

$$x=t^6.$$

Se obține o integrală de funcție rațională

$$I=\int_1^2 t^{-7}(t-1)^2\,6t^5\,dt=6\int_1^2\left(1-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt=6\left(t-\ln t^2-\frac{1}{t}\right)\Big|_1^2=9-12\ln 2.$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 1.11. EXTINDEREA NOȚIUNII DE INTEGRALĂ DEFINITĂ

Noțiunea de integrală definită a fost introdusă în condițiile în care limitele de integrare și funcția de integrat sînt mărginite. Vom arăta însă că în anumite condiții putem da sens integralei definite, chiar dacă nu sînt îndeplinite aceste cerințe.

A. Integrale cu limite de integrare infinite

Considerăm integrale definite, în care limitele de integrare sînt infinite, deci integrale de forma

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Cum ultimele două integrale se pot exprima prin integrale de forma

$$\int_a^{-\infty} f(x)\,dx \quad \text{și} \quad \int_a^{\infty} f(x)\,dx,$$

ne vom referi numai la aceste tipuri de integrale.

Definiție. Fie funcția $f(x)$ definită pe $[a, \infty)$, integrabilă pe $[a, A]$ oricare ar fi $A>0$.

Dacă $\lim\limits_{A\to\infty} \int_a^A f(x)\,dx$ există și e finită vom spune că *integrala* $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *are sens* sau că e *convergentă* și vom nota

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)\,dx.$$

O integrală care nu e convergentă spunem că e *divergentă* sau *fără sens*.

Analog se definește convergența integralei

$$\int_a^{-\infty} f(x)\,dx.$$

Aplicație. Să se calculeze $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^2}$.

Pentru aceasta considerăm

$$\int_0^A \frac{dx}{(1+x)^2} = -\frac{1}{1+x}\Big|_0^A = 1 - \frac{1}{1+A}.$$

Avem

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{dx}{(1+x)^2} = \lim_{A\to\infty} \left(1 - \frac{1}{1+A}\right) = 1.$$

Integrala I are sens și

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^2} = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

B. Integrale din funcții nemărginite

În definiția dată integralei definite $\int_a^b f(x)\,dx$ am presupus că funcția $f(x)$ este mărginită pe $[a, b]$.

Sînt cazuri cînd putem da sens noțiunii de integrală definită chiar dacă $f(x)$ are limite infinite în puncte ale intervalului $[a, b]$.

Considerăm deci cazul integralei

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{cu} \quad \lim_{x\to c} |f(x)| = +\infty, \quad c \in [a, b].$$

Cum

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

se poate presupune că punctul în care funcția e nemărginită e limită de integrare.

Definiție. Fie $f(x)$ o funcție definită pe (a, b), integrabilă pe $[\alpha, \beta]$ pentru orice $\alpha > a$, $\beta < b$ și $\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$. Dacă $\lim_{\substack{\alpha\to a \\ \alpha>a}} \int_\alpha^\beta f$ există și e finită vom spune că *integrala* $\int_a^\beta f(x)\,dx$ *e convergentă* sau că *are sens* și vom nota

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = \lim_{\substack{\alpha\to a \\ \alpha>a}} \int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

Dacă $\lim_{\substack{x\to b \\ x<b}} |f(x)| = +\infty$, atunci vom nota

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\beta\to b \\ \beta<b}} \int_a^\beta f(x)\,dx.$$

Despre o integrală care nu e convergentă spunem că e *divergentă* sau *fără sens*.

Aplicație. Să se calculeze $I = \int_a^b \frac{\alpha x}{(x-a)^\lambda}$.

Cu $\alpha > a$, avem integrala

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda}(x-a)^{1-\lambda}\Big|_a^b = \frac{1}{1-\lambda}[(b-a)^{1-\lambda} - (\alpha-a)^{1-\lambda}], \quad \lambda \neq 1.$$

a) Dacă $\lambda < 1$, atunci $1-\lambda > 0$ și

$$\lim_{\substack{\alpha\to a \\ \alpha>a}} \int_\alpha^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda},$$

iar integrala I e convergentă.

b) Dacă $\lambda>1$, atunci $\lambda-1>0$ şi

$$\lim_{\substack{\alpha\to a\\ \alpha>a}}\int_{\alpha}^{b}\frac{dx}{(x-a)^{\lambda}}=\lim_{\substack{\alpha\to a\\ \alpha>a}}\frac{1}{1-\lambda}\left[\frac{1}{(b-a)^{\lambda-1}}-\frac{1}{(\alpha-a)^{\lambda-1}}\right]=+\infty,$$

iar integrala I este divergentă.

c) Dacă $\lambda=1$,

$$\int_{\alpha}^{b}\frac{dx}{(x-a)^{\lambda}}=\int_{\alpha}^{b}\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|\Big|_{\alpha}^{b}=\ln|b-a|-\ln|\alpha-a|$$

şi

$$\lim_{\substack{\alpha\to a\\ \alpha>a}}\int_{\alpha}^{b}\frac{dx}{(x-a)^{\lambda}}=\lim_{\substack{\alpha\to a\\ \alpha>a}}[\ln|b-a|-\ln(\alpha-a)]=+\infty,$$

astfel că integrala e divergentă.

§ 1.12. INTEGRALA STIELTJES

1.12.1. SUME INTEGRALE STIELTJES – DEFINIŢII, PROPRIETĂŢI

Fie funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ mărginite pe $[a, b]$ şi (d_n) o diviziune a intervalului $[a, b]$. Suma

$$\sigma_n(\xi_i)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\,\Delta g(\xi_i),\quad \xi_i\in[x_i, x_{i+1}], \tag{1.41}$$

în care $\Delta g(\xi_i)=g(x_{i+1})-g(x_i)$ se numeşte *sumă integrală Stieltjes* asociată funcţiilor f şi g şi punctelor ξ_i.

Considerînd un şir de diviziuni (d_n) cu norma $\nu(d_n)\to 0$ cînd $n\to\infty$, dacă pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_i

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(\xi_i)=I,$$

vom spune că funcţia *f e integrabilă Stieltjes în raport cu g pe $[a, b]$*, sau mai scurt : „f e integrabilă prin raport cu g", iar numărul I se notează

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg(x)\quad\text{sau}\quad\int_a^b f(x)\,dg(x)$$

şi se numeşte *integrala Stieltjes a lui f în raport cu g*.

Putem deci formula :

Torema 1. *Funcţia f e integrabilă Stieltjes în raport cu g pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă oricare ar fi $\varepsilon>0$, există numerele $\delta(\varepsilon)$ (care depinde de ε) şi I, astfel ca pentru orice diviziune (d_n) a intervalului $[a, b]$*

$$|\sigma_n(\xi_i)-I|<\varepsilon,\quad \text{dacă}\quad \nu(d_n)<\delta(\varepsilon).$$

Scanned with OKEN Scanner

Sumei (1.41), analoagă cu suma Riemann, i se mai spune sumă *Riemann-Stieltjes* asociată funcțiilor f și g și ea exprimă o generalizare a sumei Riemann, aceasta din urmă obținîndu-se din (1.41) considerînd $g(x)=x$.

Mergînd pe aceeași linie ca și în cazul integralei Riemann, presupunînd funcția $g(x)$ crescătoare, cu notațiile introduse, se definesc sumele Darboux-Stieltjes, inferioară și superioară, asociate funcțiilor f și g și diviziunii (d_n):

$$s_n=s_n(f, g)=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\,[g(x_{i+1})-g(x_i)],$$

$$S_n=S_n(f, g)=\sum_{i=0}^{n-1} M_i\,[g(x_{i+1})-g(x_i)]$$

și se stabilesc următoarele proprietăți:

1^0. Dacă s și S sînt sumele Darboux-Stieltjes ale unei diviziuni (d) a intervalului $[a, b]$

$$m\,[g(b)-g(a)]\leqslant s\leqslant S\leqslant M\,[g(b)-g(a)].$$

2^0. Oricare ar fi diviziunile (d') și (d'')

$$s'\leqslant S''.$$

3^0. Dacă diviziunea (d') e mai fină decît diviziunea (d)

$$s\leqslant s'\leqslant S'\leqslant S.$$

4^0. Oricare ar fi alegerea punctelor intermediare ξ_i în diviziunea (d_n)

$$s_n\leqslant\sigma_n(f, g)\leqslant S_n.$$

5^0. Mulțimile $\{s_n\}$ și $\{S_n\}$ sînt mărginite.

Din proprietățile 3^0 și 5^0 rezultă că dacă se consideră un șir de diviziuni (d_n) cu $\nu(d_n)\to 0$ cînd $n\to\infty$, șirurile (s_n) și (S_n) sînt convergente, astfel că, avînd în vedere proprietatea 4^0 și definiția integralei Stieltjes, deducem că f e integrabilă Stieltjes în raport cu g numai dacă

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty} S_n.$$

În acest caz

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f, g)=\int_a^b f(x)\,dg(x).$$

Se demonstrează ca și în cazul integralei Riemann:

Teorema 2. *Dacă funcția f e mărginită și g crescătoare pe $[a, b]$, o condiție necesară și suficientă ca f să fie integrabilă prin raport cu g pe $[a, b]$ este ca oricare ar fi $\varepsilon>0$ să existe un număr $\delta(\varepsilon)$ astfel ca, dacă $\nu(d_n)<\delta(\varepsilon)$,*

$$S_n-s_n<\varepsilon.$$

Următoarea teoremă precizează o clasă de perechi de funcții integrabile Stieltjes.

Teorema 3. *Dacă f e continuă și g crescătoare pe $[a, b]$, f e integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$.*

Notînd $\omega_i = M_i - m_i$

$$S_n - s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i [g(x_{i+1}) - g(x_i)].$$

Cum $g(x)$ e crescătoare, $g(x_{i+1}) - g(x_i) > 0$; f fiind continuă $\omega_i = M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}$ dacă $|x_{i+1} - x_i| < \delta(\varepsilon)$. Deci, dacă $\nu(d_n) < \delta(\varepsilon)$,

$$S_n - s_n < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)} \sum_{i=0}^{n-1} [g(x_{i+1}) - g(x_i)] = \varepsilon$$

și f e integrabilă prin raport cu g.

1.12.2. PROPRIETĂȚI ALE INTEGRALEI STIELTJES

Sînt exprimate de următoarele teoreme:

Teorema 4 (*A doua proprietate de liniaritate a integralei Stieltjes*). *Dacă f e integrabilă pe $[a, b]$ în raport cu funcțiile $g_1, g_2 \dots g_k$ și $\lambda_j \in R$, $j = 1 \div k$, atunci f e integrabilă în raport cu $g = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j$ pe $[a, b]$ și*

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \int_a^b f(x)\, dg_j(x).$$

Cu notațiile introduse

$$\sigma_n(f, g_j) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g_j(x_{i+1}) - g_j(x_i)], \quad j = 1 \div k,$$

iar

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \sigma_n(f, g_j) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j [g_j(x_{i+1}) - g_j(x_i)] \right) =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(x_{i+1}) - g(x_i)] = \sigma_n(f, g),$$

încît, trecînd la limită pentru $n \to \infty$, deducem

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(f, g) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \lim_{n\to\infty} \sigma_n(f, g_j) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \int_a^b f(x)\, dg_j(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 5 (*Proprietatea de reversibilitate a integrabilității Stieltjes și formula de integrare prin părți*). *Dacă f e integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$, atunci și g e integrabilă în raport cu f pe $[a, b]$ și*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)=f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}f(x). \tag{1.42}$$

Considerăm diviziunea (d_n). Punctele intermediare ξ_i, $i=0\div(n-1)$ formează și ele o diviziune (d_n') a intervalului $[a, b]$ dacă luăm $\xi_0=a$, $\xi_{n-1}=b$. Avem

$$\sigma_n(f,\ g)=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\ [g(x_{i+1})-g(x_i)]=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i-1})\ \ g(x_i)-\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,g(x_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)\ [f(\xi_{i-1})-f(\xi_i)]+f(\xi_{n-1})\ g(x_n)-f(\xi_0)\ g(x_0)$$

sau

$$\sigma_n(f, g)=f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a)-\sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)\ [f(\xi_i)-f(\xi_{i-1})]. \tag{1.43}$$

Luăm acum pe (d_n'), diviziune a intervalului $[a, b]$ și x_i, $i=0\div(n-1)$ puncte intermediare ; cum $\nu(d_n)\leqslant 2\nu(d_n')$, considerînd pe (d_n') astfel ca $\nu(d_n')\to 0$ cînd $n\to\infty$, rezultă că și $\nu(d_n)\to 0$ cînd $n\to\infty$, astfel că, trecînd la limită pentru $n\to\infty$, membrul stîng al egalității (1.43) are limită, deci și membrul drept va avea limită și obținem egalitatea (formula integrării prin părți)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)=f(x)\ f(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}f(x),$$

din care deducem și integrabilitatea funcției g în raport cu f.

Teorema 6. *Dacă f e continuă, iar g are derivată continuă pe $[a, b]$, atunci f e integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$ și*

$$(S)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)=\int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.44}$$

Aplicînd funcției g formula creșterilor finite pe $[x_i, x_{i+1}]$ obținem

$$g(x_{i+1})-g(x_i)=g'(\xi_i)\ \ (x_{i+1}-x_i),\quad \xi_i\in(x_i, x_{i+1}),\quad i=0\div(n-1)$$

astfel că, alegînd ca puncte intermediare în diviziunea (d_n) punctele ξ_i, suma integrală Stieltjes

$$\sigma_n(f,\ g)=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\ \ [g(x_{i+1})-g(x_i)]$$

poate fi scrisă sub forma

$$\sigma_n(f, g)=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,g'(\xi_i)\,(x_{i+1}-x_i). \tag{1.45}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $f(x)\,g'(x)$ e funcție continuă pe $[a, b]$, ea e integrabilă (Riemann) pe $[a, b]$ încît membrul drept al egalității (1.45), fiind sumă riemaniană a funcției $f(x)\,g'(x)$, are limită cînd $n\to\infty$ și

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f, g)=(S)\int_a^b f(x)\,dg(x)=\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx.$$

Observații: 1°. Teorema rămîne valabilă și dacă

$$g(x)=\int_a^x \varphi(x)\,dx, \quad a\in R$$

unde $\varphi(x)$ e integrabilă.

În acest caz (1.44) se scrie sub forma

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg(x)=\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{1.44'}$$

Într-adevăr, considerînd $\varphi(x)$ pozitivă (nu restrîngem generalitatea), avem

$$\sigma_n=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,[g(x_{i+1})-g(x_i)]=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi(x)\,dx$$

și

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

astfel că

$$\sigma_n-\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}[f(\xi_i)-f(x)]\,\varphi(x)\,dx.$$

Notînd $\omega_i=sup\,\{|f(\xi_i)-f(x)|\}$, unde $\xi_i, x\in[x_i, x_{i+1}]$, $i=0\div(n-1)$, rezultă că $\omega^n=max\,\{\omega_i\}\to 0$ dacă $\nu(d_n)\to 0$ cînd $n\to\infty$, iar

$$\left|\sigma_n-\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\right|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f(\xi_i)-f(x)|\,\varphi(x)\,dx<$$

$$<\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\omega^n\varphi(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n-1}\omega^n\,[g(x_{i+1})-g(x_i)]=\omega^n\,[g(b)-g(a)]\to 0,$$

astfel că

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=(S)\int_a^b f(x)\,dg(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

2°. Teorema rămîne valabilă și dacă $g(x)$ e continuă pe $[a, b]$, are derivată integrabilă și continuă pe $[a, b]$, cu excepția unui număr finit de puncte.

Scanned with OKEN Scanner

Afirmația rezultă avînd în vedere observația 1 și că

$$g(x)=\int_a^x g'(x)\,dx, \quad a\in R,$$

unde $g'(x)$ e integrabilă.

În formula (1.44), folosită pentru calculul integralei Stieltjes, membrul drept se obține dacă, înțelegînd prin simbolul $dg(x)$ diferențiala funcției $g(x)$, se înlocuiește $dg(x)$ cu $g'(x)\,dx$.

Vom enunța în continuare proprietăți ale integralei Stieltjes, pe care le are și integrala Riemann și care se demonstrează la fel :

Proprietatea de ereditate. Dacă f e integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$ și $[c, d]\subset[a, b]$, atunci f e integrabilă în raport cu g pe $[c, d]$.

Proprietatea de aditivitate față de interval. Dacă $a<c<b$ și dacă f e integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$, ea este integrabilă pe $[a, c]$ și $[c, b]$ și

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)=\int_a^c f(x)\,dg(x)+\int_c^b f(x)\,dg(x).$$

Prima proprietate de liniaritate. Dacă funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_k$ sînt integrabile în raport cu g pe $[a, b]$ și dacă $\lambda_j\in R, j=1\div k$, atunci și funcția $f=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j f_j$ e integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$ și

$$\int_a^b\left[\sum_{j=1}^{k}\lambda_j f_j(x)\right]dg(x)=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\int_a^b f_j(x)\,dg(x).$$

Proprietatea de medie. Dacă f e continuă, iar g crescătoare pe $[a, b]$, atunci există un număr $\xi\in[a, b]$ astfel ca

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)=f(\xi)\,[g(b)-g(a)].$$

Alături de aceste proprietăți comune ale integralelor Stieltjes și Riemann, sînt situații cînd apar și deosebiri.

De exemplu, în cazul funcțiilor

$$f(x)=\begin{cases}1, & -1\leqslant x<0\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases} \qquad \text{și} \quad g(x)=\begin{cases}0, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ 1, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$$

$f(x)$ e integrabilă în raport cu $g(x)$ pe $[-1, 0]$ și pe $[0, 1]$. Constatăm însă că $f(x)$ nu e integrabilă în raport cu $g(x)$ pe $[-1, 1]$.

Într-adevăr, considerînd diviziunea (d_n) a intervalului $[-1, 1]$ astfel ca originea să nu fie punct al diviziunii, ea aflîndu-se pe intervalul (x_j, x_{j+1}), constatăm că, după cum punctul intermediar $\xi_j\in[x_j, x_{j+1}]$ e la stînga originii, sau la dreapta originii, suma integrală Stieltjes este 1, sau zero, astfel că șirul sumelor integrale, cînd $\nu(d_n)\to 0$, nu are limită și funcția $f(x)$ nu e integrabilă în raport cu $g(x)$ pe intervalul $[-1, 1]$.

Se arată însă că diferențele între proprietățile integralei Riemann și ale integralei Stieltjes dispar dacă măcar una dintre funcțiile f și g e continuă. Menționăm de asemenea că există o serie de probleme legate de integrala Stieltjes care nu se pun în cazul integralei Riemann.

Scanned with OKEN Scanner

Se face, avînd în vedere teorema 6, în condițiile în care f e continuă, iar g are derivată continuă, sau mai puțin restrictiv, cînd f e continuă, iar $g(x)$ e continuă pe $[a, b]$, are derivată cu excepția unui număr finit de puncte, integrabilă pe $[a, b]$.

Fie funcția $g(x)$ care are pe intervalul $[a, b]$ un număr finit de puncte de discontinuitate de prima speță (spunem că $x=c$ e punct de discontinuitate de prima speță dacă limitele laterale $\lim\limits_{\substack{x\to c\\x<c}} g(x)=f(c-0)$, $\lim\limits_{\substack{x\to c\\x>c}} g(x)=f(c+0)$ sînt finite și cel puțin una diferă de $f(c)$ — valoarea funcției în punct).

Pornind de la funcția discontinuă standard

$$\rho(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\leqslant 0\\ 1 & , \quad x>0,\end{cases}$$

discontinuă la dreapta, continuă însă la stînga în punctul $x=0$ (la dreapta lui zero $f(+0)=1\neq f(0)=0$, iar la stînga lui zero $f(-0)=0=f(0)$), valoarea saltului fiind $f(+0)-f(0)=1$ (vezi fig. 1.10), construim funcțiile

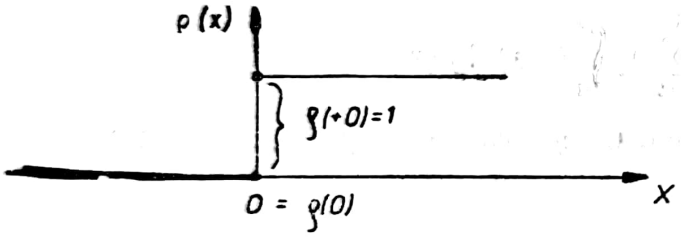


Fig. 1.10.

$$\rho(x-c)=\begin{cases}0 & , \quad x\leqslant c\\ 1 & , \quad x>c\end{cases}$$

și

$$\rho(c-x)=\begin{cases}1 & , \quad x<c\\ 0 & , \quad x\geqslant c,\end{cases}$$

respectiv cu graficele din fig. 1.11 *a*, *b*, discontinue în c și continue în rest. Funcția $\rho(x-c)$ are discontinuitate la dreapta punctului c, iar $\rho(c-x)$ are discontinuitate la stînga (aceste funcții sînt însă continue respectiv la stînga lui c și la dreapta lui c).

Să arătăm că există

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg(x-c), \quad a\leqslant c\leqslant b,$$

unde $f(x)$ e o funcție continuă în punctul c.

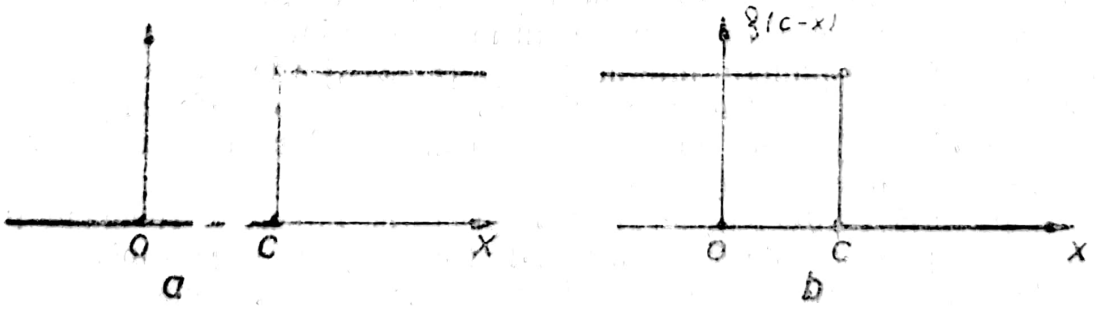


Fig. 1.11.

Considerînd diviziunea (d_n) a intervalului $[a, b]$, există un interval parțial $[x_k, x_{k+1}]$ astfel ca $x_k \leqslant c \leqslant x_{k+1}$, iar suma Stieltjes corespunzătoare este

$$\sigma_n (f, g)=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,[\rho(x_{i+1}-c)-\rho(x_i-c)]=f(\xi_k),\ \xi_k\in[x_k, x_{k+1}],$$

dat fiind faptul că $\rho(x_{i+1}-c)-\rho(x_i-c)=0$ dacă $i\neq k$ și $\rho(x_{i+1}-c)-\rho(x_i-c)=1$, dacă $i=k$.

Avem deci

$$(1.46)\qquad (S)\int_a^b f(x)\,d\rho(x-c)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=f(c),\ a\leqslant c<b.$$

Dacă $c=b$, în σ_n toți termenii sînt nuli și integrala din (1.46) e nulă.

Analog se deduce

$$(1.46')\qquad (S)\int_a^b f(x)\,d\rho(x-c)=-f(c),\ a<c\leqslant b.$$

De asemenea, integrala din (1.46') e nulă dacă $c=a$.

Cu rezultatele obținute putem demonstra:

Teorema 7. *Fie funcția $f(x)$ continuă pe $[a, b]$.*
Dacă: α) *$g(x)$ are derivată pe $[a, b]$, cu excepția unui număr finit de puncte,*
β) *derivata lui $g(x)$ e integrabilă pe $[a, b]$,*
γ) *$g(x)$ are un număr finit de puncte de discontinuitate de prima speță:*

$$c_0=a<c_1<\ldots<c_k<\ldots<c_m=b,$$

atunci $f(x)$ e integrabilă Stieltjes în raport cu $g(x)$ și

$$(1.47)\quad (S)\int_a^b f(x)\,dg(x)=\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx+\sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)\,[g(c_k+0)-g(c_k-0)]+$$
$$+f(a)\,[g(a+0)-g(a)]+f(b)\,[g(b)-g(b-0)].$$

Considerînd oscilațiile funcției $g(x)$ la dreapta și la stînga punctelor de discontinuitate c_k:

$$\alpha_k^+=g(c_k+0)-g(c_k),\qquad k=0\div(m-1)$$
$$\alpha_k^-=g(c_k)-g(c_k-0),\qquad k=1\div m,$$

construim funcția

$$g_1(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^+\rho(x-c_k)-\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^-\rho(c_k-x),$$

discontinuă în punctele în care e discontinuă și $g(x)$.

Să arătăm că funcția

$$g_2(x)=g(x)-g_1(x)$$

e continuă pe $[a, b]$.

Ea e continuă în toate punctele $x \neq c_k$, întrucît $g(x)$ și $g_1(x)$ sînt continue în aceste puncte. Rămîne să arătăm că funcția e continuă și în punctele $x=c_k$, $k=0 \div m$.

Pentru a deduce continuitatea lui $g_2(x)$ la dreapta punctului c_k $(k<m)$, e suficient să studiem continuitatea expresiei

$$E_1(x)=g(x)-\alpha_k^+ \rho(x-c_k), \quad k=0 \div (m-1),$$

ceilalți termeni din $g(x)$ fiind continui la dreapta în acest punct.

Cum

$$E_1(c_k)=g(c_k), \text{ iar } \alpha_k^+=g(c_k+0)-g(c_k), \quad k=0 \div (m-1)$$

$$E_1(c_k+0)=\lim_{\substack{x \to c_k \\ x>c_k}} E_1(x)=g(c_k+0)-\alpha_k^+=g(c_k)=E_1(c_k),$$

rezultă că funcția $E_1(x)$ e continuă la dreapta în punctul c_k, deci $g_2(x)$ e continuă la dreapta în acest punct.

În mod analog se arată că

$$E_2(x)=g(x)+\alpha_k^- \rho(c_k-x), \quad k=1 \div m,$$

e continuă la stînga în punctul c_k. Rezultă că $g_2(x)$ e continuă la stînga în acest punct ; fiind continuă la stînga și la dreapta în puntul $x=c_k$, $g_2(x)$ e continuă în acest punct.

Dacă $g(x)$ are derivată într-un punct $x \neq c_k$, cum $g_1(x)$, fiind constantă în jurul acestui punct, are derivată (egală cu zero) în acest punct, deducem că g_2 e derivabilă în punctul x și derivata sa este

$$g_2'(x)=g'(x)$$

o funcție integrabilă pe $[a, b]$. Cum $f(x)$ e continuă pe $[a, b]$, ea e integrabilă în raport $g_2(x)$ pe $[a, b]$ (vezi observația 2 de la teorema 6) și

$$(1.48) \qquad (S)\int_a^b f(x)\, dg_2(x) = \int_a^b f(x)\, g_2'(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx.$$

Avînd în vedere (1.46), (1.46') și a doua proprietate de liniaritate a integralei (teorema 4), rezultă că $f(x)$ e integrabilă în raport cu $g_1(x)$ și

$$(1.49) \qquad (S)\int_a^b f(x)\, dg_1(x)=\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^+ (S)\int_a^b f(x)\, d\rho(x-c_k) -$$

$$-\sum_{k=1}^{m} \alpha_k^- (S)\int_a^b f(x)\, d\rho(c_k-x)=\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^+ f(c_k)+\sum_{k=1}^{m} \alpha_k^- f(c_k)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)(\alpha_k^+ +\alpha_k^-)+\alpha_0^+ f(c_0)+\alpha_m^- f(c_m)=\sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)[g(c_k+0)-g(c_k-0)]+$$

$$+f(a)\,[g(a+0)-g(a)]+f(b)\,[g(b)-g(b-0)].$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $f(x)$ e integrabilă în raport cu $g_2(x)$ și $g_1(x)$, ea e integrabilă și în raport cu $g(x)=g_2(x)+g_1(x)$, încît, aplicăm în (1.48) a doua proprietate de liniaritate și avînd în vedere că $g_2(x)=g(x)-g_1(x)$, obținem egalitatea

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg(x)-(S)\int_a^b f(x)\,dg_1(x)=\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx,$$

care adunată cu (1.49) conduce la rezultatul (1.47).

Exemple. a) Conform teoremei 6 există

$$(S)\int_0^2 x^2\,d\ln(1+x),$$

întrucît $f(x)=x^2$ și $g'(x)=\frac{d}{dx}\ln(1+x)=\frac{1}{1+x}$ sînt continue pe $[0,2]$. Aplicînd formula (1.44) obținem

$$(S)\int_0^2 x^2 d\ln(1+x)=\int_0^2\frac{x^2}{1+x}\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln(1+x)\right]\Big|_0^2=\ln 3.$$

b) Pentru a calcula

$$(S)\int_{-2}^2(x^3+1)\,dg(x),$$

unde

$$g(x)=\begin{cases}x+2, & -2\leqslant x\leqslant -1\\ 2, & -1<x<0\\ x^2+3, & 0\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

avem în vedere teorema 7: pe intervalul $[-2,2]$ funcția $f(x)=x^3+1$ e continuă, iar funcția $g(x)$ are numai discontinuități de speța întîi — în punctele $x_1=-1$ și $x_2=0$, unde valorile salturilor sînt egale cu 1, vezi fig. 1.12, iar derivata sa

$$g'(x)=\begin{cases}1, & -2\leqslant x<-1\\ 0, & -1<x<0\\ 2x, & 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

există, cu excepția punctului $x=-1$, ea fiind integrabilă pe $[-2,2]$.

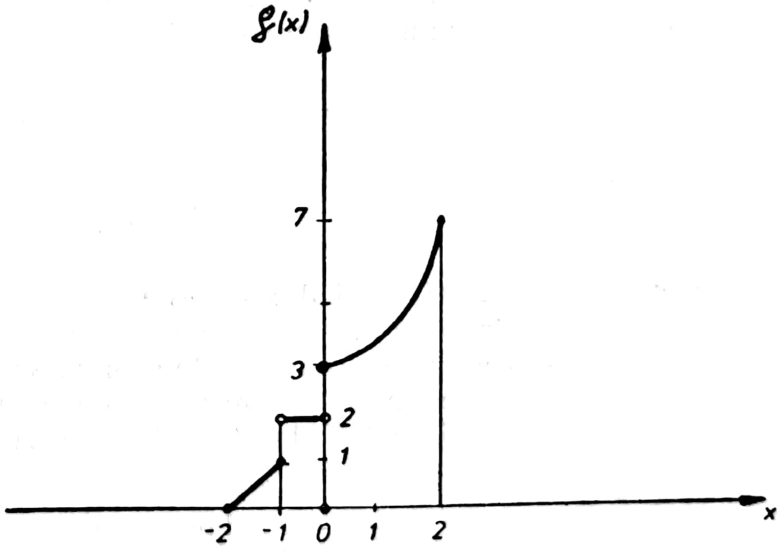


Fig. 1.12.

Folosim formula (1.47) și obținem

$$(S)\int_{-2}^2(x^3+1)\,dg(x)=\int_{-2}^{-1}(x^3+1)\,dx+\int_0^2 2x(x^3+1)\,dx+$$
$$+f(-1)\,[g(-1+0)-g(-1-0)]+f(0)\,[g(+0)-g(-0)]=$$
$$=\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\Big|_{-2}^{-1}+\left(2\,\frac{x^5}{5}+x^2\right)\Big|_0^2+0\cdot(2-1)+1\cdot 1=15\,\frac{1}{20}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2. SERII

§ 2.1. ASUPA CONVERGENȚEI ȘIRURILOR NUMERICE

Definiție. Spunem că șirul de numere $(U_n)_n$ **este** *șir convergent* și are limita l, dacă oricare ar fi numărul $\varepsilon > 0$, există un **număr** $N(\varepsilon)$ (care depinde de ε) astfel ca

$$|U_n - l| < \varepsilon, \qquad \forall n > N(\varepsilon).$$

Vom scrie

$$\lim_{n\to\infty} U_n = l$$

și citim „limita lui $(U_n)_n$ cînd $n \to \infty$ este l".

Dacă un șir este convergent, spunem că *șirul are limită.*

Șirurile care nu sînt convergente se numesc *șiruri divergente.*

Șirul $(U_n)_n$ are limita $+\infty$, dacă oricare ar fi $A \in R$, există un număr $N(A)$ astfel ca, pentru orice $n > N(A)$, $U_n > A$. Vom scrie $\lim_{n\to\infty} U_n = +\infty$ și citim „limita lui $(U_n)_n$ este $+\infty$".

Sirul $(U_n)_n$ are limita $-\infty$, dacă oricare ar fi $B \in R$, există un număr $N(B)$ astfel ca pentru orice $n > N(B)$, $U_n < B$. Vom scrie $\lim_{n\to\infty} U_n = -\infty$ și citim „limita lui $(U_n)_n$ este $-\infty$".

Șirurile care au limita $+\infty$ sau $-\infty$ sînt șiruri divergente.

Utilizarea definiției în stabilirea convergenței unui șir implică aflarea numărului l — limita șirului.

Dispunem însă de un criteriu — criteriul de convergență a lui Cauchy, prin care putem decide dacă un șir este sau nu convergent fără a face apel la limita șirului, criteriu exprimat prin următoarea

Teoremă. *O condiție necesară și suficientă ca șirul* $(U_n)_n$ *să fie convergent este ca oricare ar fi numărul* $\varepsilon>0$, *să existe un număr* $N(\varepsilon)$ *astfel ca*

$$|U_{n+p}-U_n|<\varepsilon, \text{ dacă } n>N(\varepsilon), \ \forall p\in N. \tag{2.1}$$

Dacă șirul $(U_n)_n$ este convergent și are limita l, oricare ar fi $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2}>0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel ca

$$|U_n-l|<\varepsilon_1, \ |U_{n+p}-l|<\varepsilon_1 \text{ dacă } n>N(\varepsilon), \ \forall p\in N.$$

Dar

$$|U_{n+p}-U_n|=|(U_{n+p}-l)-(U_n-l)|\leqslant|U_{n+p}-l|+|U_n-l|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Deci

$$|U_{n+p}-U_n|<\varepsilon \text{ dacă } n>N(\varepsilon), \ \forall p\in N,$$

astfel că (2.1) *este o condiție necesară pentru convergența șirului.*

Să arătăm că (2.1) este o *condiție suficientă de convergență.*

Din (2.1) rezultă că

$$|U_{n+p}-U_n|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ dacă } n>N=N(\varepsilon), \ \forall p=1, \ 2, \ 3 \ldots$$

Deci

$$|U_{N+p}-U_{N+1}|<\frac{\varepsilon}{2}, \ \forall p=1, \ 2, \ 3 \ldots,$$

adică

$$U_{N+p}\in\left(U_{N+1}-\frac{\varepsilon}{2}, \ U_{N+1}+\frac{\varepsilon}{2}\right), \ \forall p=1, \ 2, \ 3 \ldots$$

În intervalul $\left(U_{N+1}-\frac{\varepsilon}{2}, \ U_{N+1}+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ există un număr l astfel ca $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)\supset\left(U_{N+1}-\frac{\varepsilon}{2}, U_{N+1}+\frac{\varepsilon}{2}\right)$, încît

$$U_{N+p}\in(l-\varepsilon, \ l+\varepsilon), \ \forall p=1, \ 2, \ 3 \ldots$$

Rezultă că

$$U_n\in(l-\varepsilon, \ l+\varepsilon), \ \forall n>N(\varepsilon)$$

sau

$$|U_n-l|<\varepsilon \text{ dacă } n>N(\varepsilon).$$

Deci șirul $(U_n)_n$ este convergent, iar (2.1) este o condiție suficientă de convergență.

Unicitatea numărului $l\in\left(U_{N+1}-\frac{\varepsilon}{2}, \ U_{N+1}+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ se demonstrează prin reducere la absurd: presupunînd că există două astfel de numere l și l' $(l<l')$, luăm pe $\varepsilon_1=\frac{l'-l}{3}$ și cu cele arătate, rezultă că $U_n\in(l-\varepsilon_1, \ l+\varepsilon_1)$, $\forall n>N+1$ și $U_n\in(l'-\varepsilon_1, \ l'+\varepsilon_1)$, $\forall n>N+1$, ceea ce e contradictoriu întrucît intervalele $(l-\varepsilon_1, \ l+\varepsilon_1)$, $(l'-\varepsilon_1, \ l'+\varepsilon_1)$ n-au nici un punct comun (vezi fig. 2.1).

Scanned with OKEN Scanner

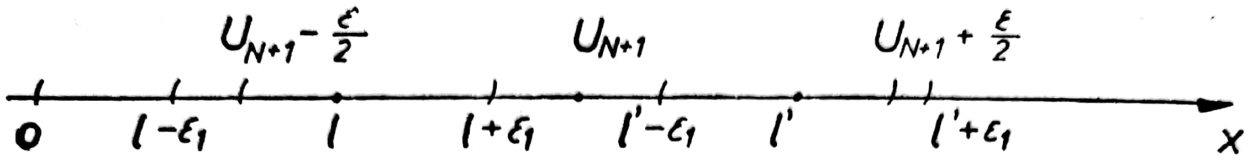


Fig. 2.1.

Observaţie. Condiţia (2.1) de convergenţă se poate prezenta sub forma

$$|U_m-U_n|<\varepsilon \text{ dacă } m,\ n>N(\varepsilon),$$

întrucît $U_m=U_{n+p}$ dacă $m>n$ şi $U_n=U_{m+p}$ dacă $n>m$, p fiind un număr natural.

Aplicaţie. Să se stabilească convergenţa şirului cu termenul general

$$U_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}, \qquad \alpha>2.$$

Avînd în vedere că

$$\frac{1}{n^\alpha}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},$$

rezultă

$$|U_{n+p}-U_n|=\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n+2)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^\alpha}<\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}, \quad \forall p\in N.$$

Cum $\frac{1}{n}<\varepsilon$ oricare ar fi $\varepsilon>0$, dacă $n>\frac{1}{\varepsilon}$, rezultă că

$$|U_{n+p}-U_n|<\varepsilon, \text{ dacă } n>\frac{1}{\varepsilon}=N(\varepsilon), \quad \forall p\in N$$

şi, conform criteriului de convergenţă al lui Cauchy, şirul $(U_n)_n$ e convergent.

§ 2.2. SERII NUMERICE

2.2.1. GENERALITĂŢI

Considerăm şirul de numere $(U_n)_n$. Simbolul

$$U_1+U_2+\ldots+U_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}U_n$$

se numeşte *serie numerică*.

Numerele $U_1, U_2, \ldots$ se numesc *termenii seriei*; U_n se numeşte *termenul general al seriei*.

Scanned with OKEN Scanner

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ se mai notează

$$\sum_{n\in N} U_n \quad \text{sau} \quad \sum_{n} U_n \quad \text{sau} \quad \sum U_n.$$

Pentru a da sens expresiei $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, considerăm şirul

$$s_1=U_1,\ s_2=U_1+U_2,\ \ldots,\ s_n=U_1+U_2+\ldots+U_n,\ \ldots$$

numit *şirul sumelor parţiale ale seriei.*

Dacă şirul $(s_n)_n$ are limita s (finită sau infinită), vom scrie

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n=U_1+U_2+\ldots+U_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} U_n$$

şi vom spune că *suma seriei este s.* Dăm astfel sens sumei unui număr infinit de termeni.

Dacă şirul $(s_n)_n$ nu are limită, seria se *numeşte serie oscilantă* şi operaţia $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ este lipsită de sens.

Dacă şirul $(s_n)_n$ e convergent seria se numeşte *serie convergentă.* În caz contrar seria este *divergentă.*

Deci, dacă şirul $(s_n)_n$ nu are limită sau dacă limita sa este sau $+\infty$, sau $-\infty$, seria se numeşte *serie divergentă.*

Rezultă că seria oscilantă este o serie divergentă.

Condiţia de convergenţă a unei serii

$$\lim_{n\to\infty} s_n=s,\ (s-\text{finit})$$

se poate scrie sub forma

$$\lim_{n\to\infty} (s-s_n)=0.$$

Din egalitatea

$$s=s_n+(U_{n+1}+U_{n+2}+\ldots),$$

notînd cu R_n *restul de ordinul n* al seriei

$$R_n=U_{n+1}+U_{n+2}+\ldots,$$

deducem că $s-s_n=R_n$ şi condiţia de convergenţă a seriei este

$$\lim_{n\to\infty} R_n=0,$$

adică restul seriei să tindă la zero cînd ordinul său tinde la infinit.

Exemplul 1. În cazul *seriei geometrice*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n=1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

termenul general al șirului sumelor parțiale este

$$(2.2) \qquad s_n = 1+q+q^2+\ldots+q^{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1}, \quad q \neq 1.$$

a) Dacă $|q|<1$, din (2.2) obținem

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Seria este deci convergentă și are suma $s = \frac{1}{1-q}$.

b) Dacă $q=1$, $s_n=n$, iar

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty.$$

Seria are suma $+\infty$, deci este divergentă.

c) Dacă $q=-1$, s_n este zero sau 1, după cum n este par, sau impar ; șirul $(s_n)_n$ nu are limită, el are punctele limită zero și unu, astfel că seria este oscilantă, deci divergentă.

d) Dacă $q<-1$, din (2.2) rezultă că șirul $(s_n)_n$ nu are limită (el are punctele limită $+\infty$ și $-\infty$), seria e oscilantă — deci divergentă.

e) Dacă $q>1$, din (2.2) obținem

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty.$$

Seria are suma $+\infty$, deci e divergentă.

Rezultă că seria geometrică e convergentă dacă $|q|<1$ și divergentă dacă $|q| \geqslant 1$.

Exemplul 2. Pentru a determina convergența *seriei armonice*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

evaluăm suma parțială s_{2^n+1}, formată cu (2^n+1) termeni :

$$s_{2^n+1} = \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2^3}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right),$$

care se compune din expresii de forma

$$a_k = \frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^k}, \quad k=1\div n,$$

egale cu suma a $2^k-2^{k-1}=2^{k-1}$ fracții descrescătoare, astfel că

$$a_k > 2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar

$$s_{2^n+1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k > \frac{n}{2},$$

Întrucît

$$\lim_{n\to\infty} s_{2^n+1} = +\infty,$$

seria e divergentă.

Exemplul 3. Pentru a determina convergența seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

descompunem termenul general al seriei în fracții simple:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Dînd lui n succesiv valorile 1, 2, ..., n obtinem

$$\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

. . . . . .

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Adunăm egalitățile membru cu membru și aflăm suma parțială

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1,$$

seria e convergentă și are suma $s=1$.

În studiul seriilor se pun două probleme:
1) stabilirea convergenței (*determinarea naturii seriei*),
2) în caz de convergență, aflarea sumei seriei.

Întrucît determinarea sumei seriilor, în cele mai multe cazuri, este foarte dificilă, sau chiar imposibilă, ne vom ocupa în special de prima problemă, în care sens vom da criterii de convergență a seriilor.

Pentru rezolvarea celei de a doua probleme, în cazul în care suma seriei nu se poate afla, se face suma unui număr suficient de mare de termeni, evaluînd astfel suma seriei cu aproximaţia dorită (vezi § 2.2.6).

2.2.2. SERII CU TERMENI DE SEMNE OARECARE

Criteriul general (al lui Cauchy). *O condiţie necesară şi suficientă ca seria* $\sum_n U_n$ *să fie convergentă este ca oricare ar fi numărul* $\varepsilon>0$, *să existe un număr* $N(\varepsilon)$ *(care depinde de* ε*), astfel ca pentru orice* $n>N(\varepsilon)$ *şi* $p\in N$

$$|U_{n+1}+U_{n+2}+\ldots+U_{n+p}|<\varepsilon. \tag{2.3}$$

Seria e convergentă dacă şirul $(s_n)_n$ al sumelor parţiale ale seriei e convergent. Condiţia necesară şi suficientă ca şirul $(s_n)_n$ să fie convergent (vezi 2.2) este ca

$$|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon \text{ dacă } n>N(\varepsilon),\ \forall p\in N. \tag{2.4}$$

Cum

$$s_{n+p}-s_n=(U_1+U_2+\ldots+U_n+U_{n+1}+\ldots+U_{n+p})-$$
$$-(U_1+U_2+\ldots+U_n)=U_{n+1}+U_{n+2}+\ldots+U_{n+p},$$

din (2.4) rezultă condiţia necesară şi suficientă de convergenţă, (2.3).

Aplicaţie. Să se studieze convergenţa *seriei armonice generalizate*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots, \qquad \alpha>0,$$

în cazul $\alpha<1$.
Aplicînd criteriul Cauchy obţinem

$$|U_{n+1}+U_{n+2}+\ldots+U_{n+p}|=\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n+2)^\alpha}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{(n+p)^\alpha}>\frac{p}{(n+p)^\alpha}>\frac{p}{n+p}.$$

Cum $p\in N$, luînd $p=n$ rezultă că

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n+2)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2n)^\alpha}>\frac{p}{n+p}=\frac{1}{2}.$$

Condiţia de convergenţă din criteriul Cauchy nu e satisfăcută, astfel că seria e divergentă.

Observaţie. a) Fiind greoi de aplicat, importanţa practică a acestui criteriu este redusă. Importanţa teoretică a sa este însă fundamentală întrucît din acest criteriu se deduc criterii suficiente de convergenţă, uşor de aplicat.

Scanned with OKEN Scanner

b) Făcînd în (2.3) $p=1$, obținem

$$|U_{n+1}|<\varepsilon, \text{ dacă } n>N(\varepsilon),$$

încît putem formula următoarea

Teoremă. *Dacă o serie e convergentă, termenul general al seriei tinde la zero.*

Reciproca nu-i adevărată : dacă termenul general al unei serii tinde la zero, nu rezultă ca seria e convergentă (vezi seria armonică, § 2.2.1, Exemplul 2).

Teorema enunțată exprimă o condiție necesară de convergență, nu însă și suficientă ; cu alte cuvinte se poate spune că, dacă termenul general al seriei nu tinde la zero, seria e divergentă.

Criteriul lui Abel. *Dacă șirul sumelor parțiale ale seriei* $\sum_n U_n$ *este mărginit, iar* (α_n) *e un șir descrescător de numere pozitive, convergent către zero, atunci seria* $\sum_n \alpha_n U_n$ *e convergentă.*

Din ipoteze rezultă că există un număr $M>0$, astfel ca $|s_n|<M$, $\forall n\in N$ și că

$$|\alpha_n-\alpha_{n+1}|=\alpha_n-\alpha_{n+1}>0, \quad \forall n\in N.$$

Cum

$$U_{n+k}=s_{n+k}-s_{n+k-1}, \qquad \forall k, n\in N$$

avem

$$|\alpha_{n+1}U_{n+1}+\alpha_{n+2}U_{n+2}+\ldots+\alpha_{n+p}U_{n+p}|=$$

$$=|\alpha_{n+1}(s_{n+1}-s_n)+\alpha_{n+2}(s_{n+2}-s_{n+1})+\ldots+\alpha_{n+p}(s_{n+p}-s_{n+p-1})|=$$

$$=|-\alpha_{n+1}s_{n+1}+s_{n+1}(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2})+\ldots+s_{n+p-1}(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p})+$$

$$+s_{n+p}\alpha_{n+p}|\leqslant|s_{n+1}|\alpha_{n+1}+|s_{n+1}|(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2})+$$

$$+\ldots+|s_{n+p-1}|(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p})+|s_{n+p}|\alpha_{n+p}<$$

$$<M[\alpha_{n+1}+(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2})+\ldots+(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p})+\alpha_{n+p}]=$$

$$=2M\alpha_{n+1}.$$

Șirul $(\alpha_n)_n$ fiind convergent către zero, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel ca

$$\alpha_{n+1}<\frac{\varepsilon}{2M}, \text{ dacă } n>N(\varepsilon),$$

încît

$$|\alpha_{n+1}U_{n+1}+\alpha_{n+2}U_{n+2}+\ldots+\alpha_{n+p}U_{n+p}|<2M\alpha_{n+1}<\varepsilon \text{ dacă } n>N(\varepsilon)$$

și, conform criteriului lui Cauchy, seria e convergentă.

2.2.3. SERII ALTERNATE

Numim *serie alternată* seria în care produsul a oricăror doi termeni consecutivi este negativ.

Seriile alternate sînt deci de forma

$$U_1-U_2+U_3-U_4+\ldots+(-1)^{n-1}U_n+\ldots \tag{2.5}$$

sau

$$-U_1+U_2-U_3+U_4-\ldots+(-1)^n U_n+\ldots, \tag{2.6}$$

unde $U_i>0$, $i=1, 2, 3, \ldots$

Deoarece seria (2.6), prin înmulțire cu -1, se reduce la seria (2.5), în continuare ne vom referi numai la serii de forma (2.5).

Criteriul lui Leibniz. *Seria alternată* $U_1-U_2+U_3-\ldots$, $U_n>0$, *în care șirul* $(U_n)_n$ *este descrescător și convergent către zero e convergentă.*

Cum șirul (de numere pozitive) $(U_n)_n$ este descrescător și convergent către zero, iar seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+\ldots$$

are sumele parțiale zero sau unu — deci mărginite, conform criteriului lui Abel seria produs

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}U_n=U_1-U_2+U_3-U_4+\ldots$$

este convergentă.

Aplicînd criteriul lui Leibniz seriei *armonice alternate*

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

constatăm că este convergentă, șirul $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ fiind descrescător și convergent către zero.

2.2.4. SERII ABSOLUT CONVERGENTE. SERII SEMICONVERGENTE

Vom spune că seria $\sum U_n$ *e absolut convergentă* dacă seria modulelor $\sum|U_n|$ e convergentă.

Dacă în seria $\sum U_n$, $U_n\geqslant 0$, $\forall n\in N$, seria se numește *serie cu termeni pozitivi*. Rezultă că dacă o serie cu termeni pozitivi e convergentă, ea e absolut convergentă.

Teoremă. *O serie absolut convergentă este convergentă.*

Fie seria $\sum U_n$ absolut convergentă. În acest caz $\sum|U_n|$ este convergentă și conform criteriului Cauchy, oricare ar fi $\varepsilon>0$,

$$|U_{n+1}|+|U_{n+2}|+\ldots+|U_{n+p}|<\varepsilon \text{ dacă } n>N(\varepsilon),\ \forall p\in N.$$

Dar

$$|U_{n+1}+U_{n+2}+\ldots+U_{n+p}|\leqslant|U_{n+1}|+|U_{n+2}|+\ldots+|U_{n+p}|<\varepsilon,$$

dacă $n>N(\varepsilon)$, $\forall p\in N$, încît seria $\sum U_n$ este convergentă.

Scanned with OKEN Scanner

Reciproca acestei teoreme nu e adevărată. Astfel, seria armonică alternată

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

e convergentă, dar nu e absolut convergentă, întrucît seria modulelor

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$$

e divergentă (vezi 2.2.1, Exemplul 2).

O serie convergentă, care nu e absolut convergentă, se numeşte *serie semiconvergentă.*

Dăm fără demonstraţie teoremele :

Teoremă. *Într-o serie absolut convergentă schimbînd ordinea termenilor obţinem o serie absolut convergentă, cu aceeaşi sumă.*

Teorema Riemann. *Într-o serie semiconvergentă se poate schimba ordinea termenilor astfel ca serie obţinută să aibă suma un număr dat, finit sau infinit sau să fie oscilantă.*

2.2.5. SERII CU TERMENI POZITIVI

Fie seria cu termeni pozitivi $\sum U_n$.
Cum $U_n \geqslant 0$, $\forall n \in N$,

$$s_n = s_{n-1} + U_n \geqslant s_{n-1}.$$

Constatăm că şirul sumelor parţiale este monoton ; pentru-ca şirul $(s_n)_n$ să fie convergent e necesar şi suficient ca el să fie mărginit.

Putem formula deci următorul criteriu de convergenţă :

Criteriul monotoniei. *Condiţia necesară şi suficientă că o serie cu termeni pozitivi să fie convergentă este ca sumele sale parţiale să fie mărginite.*

Aplicaţie. Să se arate că seria armonică generalizată

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} \tag{2.7}$$

este convergentă în cazul $\alpha>1$.

Suma parţială s_{2^n}, formată din 2^n termeni,

$$s_{2^n}=1+\left[\frac{1}{(2^1)^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}\right]+\left[\frac{1}{(2^2)^{\alpha}}+\frac{1}{5^{\alpha}}+\frac{1}{6^{\alpha}}+\frac{1}{7^{\alpha}}\right]+\ldots$$

$$\ldots+\left[\frac{1}{(2^{n-1})^{\alpha}}+\frac{1}{(2^{n-1}+1)^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{(2^n-1)^{\alpha}}\right],$$

				2	3	1	−3	−5	1	—	—
	B	C^B	D	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_2^a	V_3^a
	V_1	2	1	1	−1	0	−2	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
←	V_6	1	$\frac{1}{2}$	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
	V_3	1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$
	z_j		4	2	−2	1	−3	0	1		
	c_j-z_j			0	5	0	0	−5	0		
	V_1	2	2	1	0	0	−2	−1	2	0	0
	V_2	3	1	0	1	0	0	−1	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	V_3	1	2	0	0	1	1	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
	z_j		9	2	3	1	−3	−5	11	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
	c_j-z_j			0	0	0	0	0	−10		

Programul optim este $X=(2 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$ şi $max\ z=9$.

Observaţie. Pentru problemele cu un număr restrîns de variabile şi restricţii, numărul variabilelor artificiale se poate reduce considerînd combinaţii liniare ale restricţiilor care să introducă vectori unitari. De exemplu, în cazul tratat restricţia a doua sau a treia se poate înlocui cu restricţia obţinută scăzînd din ecuaţia a 3-a înmulţită cu 4 ecuaţia a doua. Pentru problemele concrete, cu număr mare de variabile şi restricţii metoda nu prezintă importanţă.

§ 2.5. PROBLEME DE PROGRAMARE LINIARĂ CU MAI MULTE PROGRAME OPTIME

1. Ne referim la problema sub formă standard

(2.15) $$optim\ z=optim\ C^TX,\ AX=D,\ X\geqslant 0.$$

Fie B bază corespunzătoare optimului, $\bar{X}^B$ programul de bază optim şi

(2.16) $$c_k-z_k=0,\ k\in B.$$

Într-adevăr, dacă $\sum V_n$ e convergentă, ea are sumele parțiale mărginite, încît din (2.9) rezultă că și seria $\sum U_n$ va avea sumele parțiale mărginite, deci e convergentă.

Dacă $\sum U_n$ este divergentă, sumele parțiale cresc nemărginit, încît din (2.9) deducem că și sumele parțiale ale seriei $\sum V_n$ cresc nemărginit și seria e divergentă.

Aplicație. Să se cerceteze natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a+n\cdot 2^n}, \qquad (a>0). \tag{2.9'}$$

Vom compara seria dată cu seria geometrică

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

care e convergentă avînd rația $q=\frac{1}{2}<1$.

Cum

$$\frac{n}{a+n\cdot 2^n}<\frac{n}{n\cdot 2^n}=\frac{1}{2^n}, \qquad \forall n\geqslant 1,$$

conform criteriului comparației rezultă că seria (2.9') e convergentă.

Criteriul generalizat al comparației. *Seriile cu termeni pozitivi* $\sum U_n$ *și* $\sum V_n$ *sînt de aceeași natură dacă există un număr* N *astfel ca*

$$0<A<\frac{U_n}{V_n}<B, \qquad \forall n\geqslant N. \tag{2.10}$$

Nu restrîngem generalitatea dacă presupunem îndeplinită inegalitatea (2.10) pentru $n\geqslant 1$ ($N=1$), întrucît putem neglija un număr finit de termeni de la începutul seriei și natura seriei nu se schimbă.

Scriem (2.10) sub forma

$$AV_n<U_n<BV_n, \qquad n\geqslant 1 \tag{2.10'}$$

și notînd

$$s_n=\sum_{n=1}^{n} U_n, \qquad s'_n=\sum_{n=1}^{n} V_n,$$

prin însumarea inegalităților (2.10') membru cu membru obținem

$$As'_n<s_n<Bs'_n, \qquad \forall n\geqslant 1,$$

astfel că :

— dacă seria $\sum U_n$ e convergentă, șirul $(s_n)_n$ e mărginit și din $As'_n<s_n$ rezultă că și șirul $(s'_n)_n$ e mărginit, iar seria $\sum V_n$ e convergentă,

— dacă seria $\sum U_n$ e divergentă, șirul $(s_n)_n$ e nemărginit și din $s_n<Bs'$ rezultă că șirul $(s'_n)_n$ e nemărginit, iar seria $\sum V_n$ e divergentă.

Scanned with OKEN Scanner

Scriind expresia (2.10) sub forma

$$0<\frac{1}{B}<\frac{V_n}{U_n}<\frac{1}{A}, \qquad \forall n\geqslant N,$$

cu cele arătate mai sus deducem că :
— dacă seria $\sum V_n$ e convergentă şi seria $\sum U_n$ e convergentă,
— dacă seria $\sum V_n$ e divergentă şi seria $\sum U_n$ e divergentă, încît seriile $\sum U_n$ şi $\sum V_n$ sînt de aceeaşi natură.

Folosind criteriul generalizat al comparaţiei deducem următorul

Corolar. *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n}=\lambda>0, \tag{2.10''}$$

seriile cu termeni pozitivi $\sum U_n$ şi $\sum V_n$ *sînt de aceeaşi natură.*

Din (2.10'') rezultă că

$$\left|\frac{U_n}{V_n}-\lambda\right|<\varepsilon, \qquad \forall n>N(\varepsilon),$$

încît, alegîndu-i pe ε astfel ca $A=\lambda-\varepsilon>0$ rezultă că

$$0<A=\lambda-\varepsilon<\frac{U_n}{V_n}<\lambda+\varepsilon=B, \qquad \forall n>N=N(\varepsilon)$$

şi seriile $\sum U_n$ şi $\sum V_n$ sînt de aceeaşi natură.

Consideraţiile făcute sînt valabile şi în cazul în care şirul $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)_n$ nu are limită: dacă şirul $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)_n$ are punctele limită finite şi diferite de zero, seriile $\sum U_n$ şi $\sum V_n$ sînt de aceeaşi natură.

Aplicaţie. Să se determine natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Considerăm seria divergentă (seria armonică)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

şi notînd cu U_n, respectiv V_n termenii generali ai celor două serii, obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=\ln e=1>0.$$

Seriile $\sum U_n$ şi $\sum V_n$ sînt de aceeaşi natură, deci seria dată e divergentă.

Observaţie. Cele două criterii ale comparaţiei ne dau posibilitatea să determinăm convergenţa unor serii folosind serii a căror natură este cunoscută. Pentru o

Scanned with OKEN Scanner

largă utilizare a acestor criterii, este necesară deci cunoașterea prealabilă a naturii a cît mai multor serii.

Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy). *Fie* ΣU_n *o serie cu termeni pozitivi.*

1°. *Dacă există un număr* N *și un număr* $q<1$ *astfel ca*

$$\sqrt[n]{U_n}\leqslant q, \quad \forall n\geqslant N \tag{2.11}$$

seria e convergentă.

2°. *Dacă*

$$\sqrt[n]{U_n}\geqslant 1, \quad \forall n\geqslant N \tag{2.11'}$$

seria e divergentă

1°. Din (2.11) rezultă

$$U_n\leqslant q^n, \quad \forall n\geqslant N.$$

Cum $\sum q^n$ e o serie geometrică convergentă ($q<1$), conform criteriului întîi al comparației și seria $\sum U_n$ e convergentă.

2°. Din (2.11') rezultă

$$U_n\geqslant 1, \qquad \forall n\geqslant N.$$

Cum termenul general al seriei $\sum U_n$ nu tinde la zero, seria e divergentă.

În aplicații criteriul lui Cauchy se folosește sub forma următorului

Corolar. *Dacă există* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lambda$, *atunci:*

1°. *dacă* $\lambda<1$ *seria* $\sum U_n$ *e convergentă,*

2°. *dacă* $\lambda>1$ *seria e divergentă.*

1°. În cazul în care $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lambda<1$, există un număr $\varepsilon>0$ astfel ca $q=\lambda+\varepsilon<1$ și un număr $N(\varepsilon)$ astfel ca

$$|\sqrt[n]{U_n}-\lambda|<\varepsilon, \qquad \forall n\geqslant N(\varepsilon).$$

Rezultă că

$$\lambda-\varepsilon<\sqrt[n]{U_n}<\lambda+\varepsilon=q<1, \quad \forall n\geqslant N(\varepsilon).$$

Deci

$$U_n<q^n, \qquad \forall n>N(\varepsilon)$$

și cum seria $\sum q^n$ e convergentă, din primul criteriu al comparației deducem că și seria $\sum U_n$ e convergentă.

2°. În cazul în care $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lambda>1$,

există un număr $\varepsilon>0$ astfel ca $q=\lambda-\varepsilon>1$ și un număr $N(\varepsilon)$ astfel ca

$$|\sqrt[n]{U_n}-\lambda|<\varepsilon, \quad \forall n\geqslant N(\varepsilon).$$

Rezultă că

$$1<q_1=\lambda-\varepsilon<\sqrt[n]{U_n}<\lambda+\varepsilon, \quad \forall n\geqslant N(\varepsilon).$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum

$$U_n > q_1 > 1, \quad \forall n \geqslant N \ (e)$$

seria $\sum U_n$ e divergentă.

Observaţie. Dacă $\lambda = 1$, consideraţii ca cele anterioare nu pot fi făcute şi utilizînd acest corolar nu se poate preciza natura seriei.

Aplicaţie. Să se determine natura seriei cu termenul general

$$U_n = [\sqrt{(n+1)(n+a)} - n]^n.$$

Calculînd limita

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} [\sqrt{(n+1)(n+a)} - n] = \lim_{n\to\infty} \frac{(a+1)n + a}{\sqrt{(n+1)(n+a)} + n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(a+1) + \frac{a}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a+1}{n} + \frac{a}{n^2}} + 1} = \frac{a+1}{2},$$

deducem : 1) dacă $\lambda = \frac{a+1}{2} < 1$, deci dacă $a < 1$ seria e convergentă,

2) dacă $\lambda = \frac{a+1}{2} > 1$, deci dacă $a > 1$ seria e divergentă,

3) dacă $\lambda = \frac{a+1}{2} = 1$, deci dacă $a = 1$ corolarul folosit (şi deci criteriul Chauchy) nu ne dă informaţii legat de natura seriei. Observăm însă că în acest caz $U_n = 1$; termenul general al seriei nu tinde către zero şi seria e divergentă.

Criteriul raportului (al lui D'Alembert). *Fie $\sum U_n$ o serie cu termeni pozitivi.*

1°. *Dacă există un număr N şi un număr $q < 1$ astfel ca*

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leqslant q, \qquad \forall n \geqslant N, \tag{2.12}$$

seria e convergentă.

2°. *Dacă*

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \geqslant 1, \qquad \forall n \geqslant N, \tag{2.12'}$$

seria e divergentă.

Nu restrîngem generalitatea dacă considerăm inegalităţile satisfăcute pentru $n \geqslant 1$ $(N = 1)$.

1°. Din (2.12) obţinem

$$U_2 \leqslant qU_1$$

$$U_3 \leqslant qU_2 \leqslant q^2 U_1$$

. . . . . .

$$U_n \leqslant qU_{n-1} \leqslant q^{n-1} U_1$$

. . . . . .

Scanned with OKEN Scanner

Întrucît

$$U_n \leqslant q^{n-1}U_1, \quad n=1, 2, 3, \ldots,$$

iar seria $\sum U_1 q^{n-1} = U_1 \sum q^{n-1}$ e convergentă ($q<1$) și seria $\sum U_n$ e convergentă.

2^0. Din (2.12') rezultă că

$$0<U_n \leqslant U_{n+1}, \quad \forall n \geqslant 1.$$

Termenul general al seriei nu tinde la zero, deci seria e divergentă.

Considerații analoage cu cele făcute la criteriul rădăcinii conduc la următorul corolar, sub a cărui formă utilizăm în aplicații criteriul raportului.

Corolar. *Dacă există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lambda$, *atunci* :

1^0. *dacă* $\lambda<1$, *seria* $\sum U_n$ *e convergentă,*

2^0. *dacă* $\lambda>1$, *seria e divergentă.*

Dacă $\lambda=1$, cu ajutorul corolarului, nu se poate stabili natura seriei.

Aplicație. Să se determine natura serie

$$1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{2}+\ldots+\frac{a^n}{n}+\ldots \quad (a>0).$$

Aplicînd criteriul raportului obținem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{n+1}}{\frac{a^n}{n}} = a.$$

Dacă $a<1$, seria e convergentă ; dacă $a>1$, seria a divergentă ; dacă $a=1$, utilizînd corolarul, nu se poate stabili natura seriei. Observăm însă că în acest caz seria e divergentă, fiind seria armonică.

Criteriul lui Kummer. *Fie* $\sum U_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

1^0. *Dacă există un șir* $(a_n)_n$ *de numere pozitive, numerele* $\lambda>0$ *și* N *natural astfel ca*

$$a_n \frac{U_n}{U_{n+1}} - a_{n+1} \geqslant \lambda, \quad \forall n \geqslant N, \tag{2.13}$$

seria e convergentă.

2^0. *Dacă seria* $\sum \frac{1}{a_n}$ *e divergentă și*

$$a_n \frac{U_n}{U_{n+1}} - a_{n+1} \leqslant 0, \quad \forall n \geqslant N, \tag{2.13'}$$

seria $\sum U_n$ *e divergentă.*

Nu restrîngem generalitatea dacă presupunem $N=1$.

1^0. Din expresia (2.13), scrisă sub forma

$$\lambda U_{n+1} \leqslant a_n U_n - a_{n+1} U_{n+1}$$

Scanned with OKEN Scanner

dînd lui n valorile 1, 2, ... $(n-1)$, obținem inegalitățile

$$\lambda U_1 \leqslant \lambda U_1$$
$$\lambda U_2 \leqslant a_1 U_1 - a_2 U_2$$
$$\lambda U_3 \leqslant a_2 U_2 - a_3 U_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda U_n \leqslant a_{n-1} U_{n-1} - a_n U_n,$$

din care, prin însumare, deducem

$$\lambda s_n \leqslant (\lambda + a_1)\, U_1 - a_n U_n < (\lambda + a_1)\, U_1.$$

Sumele parțiale s_n fiind mărginite, seria $\sum U_n$ e convergentă.

2^0. Notînd cu $V_n = \frac{1}{a_n}$, condiția (2.13′) se scrie sub forma

$$\frac{U_n}{V_n} \leqslant \frac{U_{n+1}}{V_{n+1}}, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

Deducem că

$$0 < q = \frac{U_1}{V_1} \leqslant \frac{U_n}{V_n}, \qquad \forall n \geqslant 1$$

sau

$$U_n \geqslant q V_n, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

Cum seria $\sum q V_n$ e divergentă, conform criteriului comparației și seria $\sum U_n$ e divergentă.

Cazuri particulare : I. Luînd $a_n = 1$ $\left(\text{seria } \sum \frac{1}{a_n} = 1+1+\ldots+1+\ldots \text{ e divergentă}\right)$, condiția de convergență (2.13) a seriei $\sum U_n$ se exprimă sub forma

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leqslant \frac{1}{\lambda+1} = \lambda_1 < 1, \qquad \forall n \geqslant N,$$

iar condiția de divergență (2.13′) devine

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \geqslant 1, \qquad \forall n \geqslant N.$$

Am obținut astfel criteriul raportului.

II. **Criteriul lui Raabe și Duhamel.** *Fie $\sum U_n$ o serie cu termeni pozitivi.*

1) *Dacă există numerele $\lambda_1 > 1$ și N astfel ca*

(2.14) $$n\left(\frac{U_n}{U_{n+1}} - 1\right) \geqslant \lambda_1, \qquad \forall n \geqslant N,$$

seria e convergentă.

2) *Dacă*

(2.14′) $$n\left(\frac{U_n}{U_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1, \qquad \forall n \geqslant N,$$

seria e divergentă.

Scanned with OKEN Scanner

1^0. Luînd $a_n=n$, condiția (2.13) de convergență a seriei $\sum U_n$ devine

$$n\frac{U_n}{U_{n+1}}-(n+1)\geqslant\lambda, \qquad \forall n\geqslant N.$$

Deci, dacă

$$n\left(\frac{U_n}{U_{n+1}}-1\right)\geqslant\lambda+1=\lambda_1>1, \qquad \forall n\geqslant N,$$

seria $\sum U_n$ e convergentă.

2^0. Cum $\sum\frac{1}{a_n}=\sum\frac{1}{n}$ e divergentă, condiția (2.13′) de divergență a seriei $\sum U_n$ devine

$$n\frac{U_n}{U_{n+1}}-(n+1)\leqslant 0, \qquad \forall n\geqslant N.$$

Deci dacă

$$n\left(\frac{U_n}{U_{n+1}}-1\right)\leqslant 1, \qquad \forall n\geqslant N.$$

seria $\sum U_n$ e divergentă.

O demonstrație analoagă cu cea făcută la criteriul rădăcinii conduce la următorul corolar, sub a cărui formă utilizăm în aplicații criteriul lui Raabe-Duhamel.

Corolar. *Dacă există* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{U_n}{U_{n+1}}-1\right)=\lambda$, *atunci* :

1) *dacă* $\lambda>1$, *seria* $\sum U_n$ *este convergentă,*

2) *dacă* $\lambda<1$, *seria* $\sum U_n$ *este divergentă.*

Dacă $\lambda=1$, cu ajutorul corolarului nu se poate stabili natura seriei.

Aplicație. Să se stabilească natura seriilor :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\frac{1}{(2n+1)}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\frac{1}{(2n+1)}$.

a) Folosind criteriul raportului rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{2(n+1)(2n+3)}=1,$$

și nu putem preciza natura seriei.

Aplicînd criteriul lui Raabe-Duhamel obținem

$$\lambda=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{U_n}{U_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{6n+5}{(2n+1)^2}=\frac{3}{2}>1,$$

și seria e convergentă.

Observăm că, criteriul lui Raabe-Duhamel e „mai tare" decît criteriul raportului.

b) Se obține

$$\lambda=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{U_n}{U_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{2n-1}{(2n+1)^2}=\frac{1}{2}<1,$$

și seria e divergentă.

Criteriile de convergență nu sînt la fel de „eficiente". Astfel, criteriul raportului e „mai slab" decît criteriul rădăcinii și a lui Raabe-Duhamel, cu acestea din urmă putînd rezolva problema convergenței unor serii pentru care criteriul raportului nu dă rezultate. În aplicații, în cazul seriilor în care criteriul raportului nu dă rezultate se utilizează, de obicei, criteriul lui Raabe-Duhamel.

2.2.6. OPERAȚII CU SERII

Propoziție. *Dacă seriile* $\sum U_n$ *și* $\sum V_n$ *sînt convergente și au respectiv suma* s *și* s', *atunci* :

1) *seria* $\sum(U_n+V_n)$ *e convergentă și are suma* $s+s'$, *adică*

$$\sum(U_n+V_n)=\sum U_n+\sum V_n.$$

2) *seria* $\sum\alpha U_n$ *e convergentă,* $\forall\alpha\in R$ *și are suma* αs, *adică*

$$\sum\alpha U_n=\alpha\sum U_n.$$

1) Notînd cu s_n, s_n', s_n'' respectiv sumele parțiale de ordinul n ale seriilor $\sum U_n$, $\sum V_n$, $\sum(U_n+V_n)$ avem

$$s_n''=\sum_{i=1}^{n}(U_i+V_i)=\sum_{i=1}^{n}U_i+\sum_{i=1}^{n}V_i=s_n+s_n'.$$

Cum șirurile $(s_n)_n$ și $(s_n')_n$ sînt convergente, șirul $(s_n'')_n$ e și el convergent și

$$\lim_{n\to\infty}s_n''=\lim_{n\to\infty}s_n+\lim_{n\to\infty}s_n'=s+s'.$$

Seria $\sum(U_n+V_n)$ e deci convergentă și are suma $s+s'$.

2) Notînd cu $\bar{s}_n$ suma parțială de ordinul n a seriei $\sum\alpha U_n$, avem

$$\bar{s}_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha U_i=\alpha\sum_{i=1}^{n}U_i=\alpha s_n.$$

Cum șirul $(s_n)_n$ e convergent și are limita s, șirul $(\bar{s}_n)_n$ e convergent și are limita αs ; seria $\sum\alpha U_n$ e deci convergentă și are linita αs.

Corolar. În ipotezele făcute rezultă :

1) *seria* $\sum(-V_n)$ *e convergentă și are suma* $-\sum V_n$,

2) *seria* $\sum(U_n-V_n)$ *e convergentă și are suma* $\sum U_n-\sum V_n$.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Dacă seria $\sum(U_n+V_n)$ e convergentă, nu rezultă că seriile $\sum U_n$ și $\sum V_n$ sînt convergente.

Într-adevăr, dacă $\sum U_n=1-1+1-1+\ldots$, $\sum V_n=-1+1-1+\ldots$, seria $\sum(U_n+V_n)=0+0+\ldots$ e convergentă ; seriile $\sum U_n$ și $\sum V_n$ sînt însă divergente (sînt serii oscilante).

2.2.7. AFLAREA SUMEI UNEI SERII CU APROXIMAȚIE DATĂ

Dacă se pune problema determinării sumei s a unei serii convergente $\sum U_n$ și acest lucru nu este posibil, suma s se evaluează prin suma parțială

$$s_p=\sum_{i=1}^{p} U_n.$$

În acest caz, cum $s=s_p+r_p$, r_p fiind *restul de ordinul p al seriei* :

$$r_p=U_{p+1}+U_{p+2}+\ldots,$$

eroarea pe care o facem în evaluarea lui s este egală cu restul r_p — care tinde la zero cînd $p\to\infty$. Deci ,luînd în suma s_p un număr p suficient de mare de termeni, obținem suma seriei cu aproximația dorită.

I. **Cazul seriilor alternate.** Fie seria alternată

$$U_1-U_2+U_3-U_4+\ldots+(-1)^{n-1}U_n+\ldots \qquad (U_n>0),$$

convergentă.

Seria fiind convergentă, termenul general al seriei tinde la zero, astfel că

(2.15) $$U_p\geqslant U_{p+1}, \qquad \forall p\geqslant N.$$

Cum

$$s=s_{2n}+U_{2n+1}-(U_{2n+2}-U_{2n+3})-\ldots$$

și

$$s=s_{2n}+(U_{2n+1}-U_{2n+2})+\ldots,$$

avînd în vedere (2.15), rezultă că parantezele din expresiile lui s sînt pozitive, deci

$$s<s_{2n}+U_{2n+1} \qquad \text{și} \qquad s>s_{2n}.$$

Obținem

$$(\alpha) \qquad 0<s-s_{2n}<U_{2n+1}.$$

De asemenea

$$s=s_{2n+1}-U_{2n+2}+(U_{2n+3}-U_{2n+4})+\ldots \text{ și } s=s_{2n+1}-(U_{2n+2}-U_{2n+3})-\ldots$$

deci

$$s>s_{2n+1}-U_{2n+2} \qquad \text{și} \qquad s<s_{2n+1}.$$

Obținem

$$(\beta) \qquad 0<s_{2n+1}-s<U_{2n+2}.$$

Inegalitățile (α) și (β) se pot scrie sub forma

$$(\alpha') \qquad 0<(s-s_{2n})\,(-1)^{2n}<U_{2n+1}$$

$$(\beta') \qquad 0<(s-s_{2n+1})\,(-1)^{2n+1}<U_{2n+2}$$

sau cu o singură relație

$$0<(s-s_p)\,(-1)^p<U_{p+1}. \tag{2.16}$$

Din (2.16) deducem că, eroarea pe care o facem cînd evaluăm suma unei serii alternate prin suma parțială s_p, e inferioară primului termen omis ; aproximarea e prin lipsă sau prin adaos, după cum numărul termenilor însumați e par sau impar.

Exemplu. Pentru a afla suma seriei armonice alternate, cu șapte zecimale exacte, se impune ca primul termen omis să fie

$$U_{p+1}=\frac{1}{p+1}=\frac{1}{10^7}.$$

Rezultă $p=9\,999\,999$ și pentru precizia cerută e necesar să însumăm 9 999 999 termeni, încît vom spune că seria armonică alternată e *slab convergentă.*

II. Cazul seriilor cu termeni pozitivi

a) Presupunem că seria cu termeni pozitivi $\sum U_n$ satisface condiția de convergență din criteriul raportului :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}\leqslant k<1, \qquad \forall n\geqslant p.$$

În acest caz

$$U_{p+2}\leqslant kU_{p+1},\ U_{p+3}\leqslant kU_{p+2}\leqslant k^2U_{p+1},\ \ldots$$

iar

$$r_p=U_{p+1}+U_{p+2}+\ldots\leqslant U_{p+1}\,(1+k+k^2+\ldots)=U_{p+1}\,\frac{1}{1-k}.$$

Din condiția

$$r_p\leqslant\frac{U_{p+1}}{1-k}<\varepsilon,$$

ca s_p să aproximeze suma seriei cu o eroare inferioară lui $\varepsilon>0$, deducem că

$$U_{p+1}<(1-k)\,\varepsilon. \tag{2.17}$$

Deci suma parțială trebuie să conțină toți termenii pînă la primul termen mai mic decît $(1-k)\,\varepsilon$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Dacă seria $\sum U_n$ satisface condiția de convergență din criteriul rădăcinii:

$$\sqrt[n]{U_n} \leqslant k < 1, \qquad \forall n \geqslant p,$$

rezultă

$$U_n \leqslant k^n.$$

În acest caz

$$r_p = U_{p+1} + U_{p+2} + U_{p+3} + \ldots \leqslant k^{p+1}(1 + k + k^2 + \ldots) = \frac{k^{p+1}}{1-k},$$

încît din condiția ca eroarea în evaluarea sumei seriei să fie inferioară lui $\varepsilon > 0$:

$$r_p \leqslant \frac{k^{p+1}}{1-k} < \varepsilon$$

deducem că numărul p al termenilor din s_p trebuie să fie

$$p > \frac{\log (1-k)\,\varepsilon}{\log k} - 1. \tag{2.18}$$

Aplicații: 1. Să se detemine suma parțială care aproximează suma seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

cu o eroare mai mică de 0,001.

Rezolvare. Cum

$$\sqrt[n]{U_n} = \frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2} = k, \qquad \forall n \geqslant 1,$$

utilizînd criteriul rădăcinii, deducem că seria e convergentă.

Luînd $\varepsilon = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < 0{,}001$, din (2.18) rezultă că dacă

$$p > \frac{\log \frac{1}{2}\,\varepsilon}{\log \frac{1}{2}} - 1 = \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 2} = \frac{\log 2^{10}}{\log 2} = 10,$$

s_p evaluează suma seriei cu o eroare mai mică de 0,001 și deci s_{11} este o sumă parțială care aproximează suma seriei cu o eroare inferioară lui 0,001.

2. Să se studieze convergența seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{2^n + 5^n}, \qquad a > 0.$$

Să se determine numărul de termeni ai sumei parțiale care aproximează suma seriei cu o eroare mai mică decît $\varepsilon > 0$, în cazul $a = 2$ și $a = \sqrt{10}$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Aplicînd criteriul raportului deducem că

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\left|\left(\frac{2}{5}\right)^n+1\right|}{2\left(\frac{2}{5}\right)^n+5}=\frac{a}{5},$$

încît seria este convergentă dacă $a<5$ și divergentă dacă $a>5$. Dacă $a=5$, termenul general al seriei

$$U_n=\frac{5^n}{2^n+5^n}=\frac{1}{5+\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

nu tinde la zero și seria e divergentă.

Pentru a afla suma seriei cu o eroare mai mică decît ε, observăm că

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}<\frac{a\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n+1\right]}{5}\leqslant\frac{29a}{125}=k,\qquad\forall n\geqslant 2.$$

Dacă $a=2$, rezultă $k=\frac{58}{125}$ și din (2.17) deducem că suma parțială trebuie să conțină toți termenii U_n, pînă la primul termen de rang p pentru care

$$\frac{2^p}{2^p+5^p}<\left(1-\frac{58}{125}\right)\varepsilon.$$

Deci, se impune ca

$$\left(\frac{5}{2}\right)^p>\left|\frac{125}{67\varepsilon}-1\right|$$

și, dacă p este prima valoare întreagă astfel ca

$$p>\frac{\log\left|\frac{125}{67\varepsilon}-1\right|}{\log\frac{5}{2}}$$

în suma parțială vom lua $(p-1)$ termni.

Dacă $a=\sqrt{10}$, rezultă $k=\frac{29\sqrt{10}}{125}<1$ și din (2.17) deducem condiția

$$\frac{(\sqrt{10})^p}{2^p+5^p}<(1-k)\,\varepsilon$$

pe care trebuie să o satisfacă rangul termenilor U_p ce nu intră în suma parțială.

Obținem inecuația

$$\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^p+\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^p}<(1-k)\,\varepsilon,$$

Scanned with OKEN Scanner

care, cu notația $\sqrt{\frac{2}{5}}=k_1$, se scrie sub forma

$$\frac{k_1^p}{k_1^{2p}+1}<(1-k)\,\varepsilon.$$

Se impune deci ca

$$(1-k)\,\varepsilon k_1^{2p}-k_1^p+(1-k)\,\varepsilon>0.$$

Rezultă

$$k_1^p\in\left(-\infty,\ \frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon^2(1-k)^2}}{2\varepsilon\,(1-k)}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon^2\,(1-k)^2}}{2\varepsilon\,(1-k)},\ \infty\right).$$

Cum $k_1^p<1$ convin doar valorile

$$k_1^p<\frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon^2\,(1-k)^2}}{2\varepsilon\,(1-k)}.$$

astfel că dacă p este prima valoare întreagă

$$p>\frac{\log\dfrac{1-\sqrt{1-4\varepsilon^2\,(1-k)^2}}{2\varepsilon\,(1-k)}}{\log k_1},\quad k_1=\sqrt{\frac{2}{5}},$$

suma parțială s_{p-1} aproximează suma seriei cu o eroare mai mică decît ε.

2.3. ȘIRURI DE FUNCȚII

Definiții. Dacă fiecărui număr $n\in N$ îi punem în corespondență o funcție $f_n(x)$, definită pe mulțimea $A\subset R$, spunem că am definit un *șir de funcții*

$$f_1(x), f_2(x)\ \ldots\ f_n(x)\ \ldots,$$

pe care-l notăm prescurtat

$$(f_n(x))\ \text{ sau }\ (f_n).$$

Vom spune că punctul $a\in A$ e *punct de convergență* al șirului de funcții $(f_n(x))$, dacă șirul de numere $(f_n(a))$ e convergent.

Mulțimea $B\subset A$ a punctelor de convergență ale șirului de funcții $(f_n(x))$, se numește *mulțimea de convergență a șirului*.

Pentru orice $x\in B$ șirul $(f_n(x))$ este convergent, limita sa o notăm cu $f(x)$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x),\qquad x\in B$$

și o numim *funcție limită*.

Scanned with OKEN Scanner

Spunem că şirul de funcţii $(f_n(x))$ e *simplu convergent* (*punctual convergent*) pe mulţimea A către funcţia $f(x)$, dacă oricare ar fi $\varepsilon>0$ şi $x\in A$, există un număr $N=N(\varepsilon, x)$ (care depinde de ε şi de x), astfel ca

(2.19) $$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \text{ dacă } n>N(\varepsilon, x)$$

şi notăm

$$f_n(x) \xrightarrow{s} f(x).$$

Dacă numărul N depinde numai de ε nu şi de x, şirul (f_n) e uniform convergent.

Spunem că şirul de funcţii $(f_n(x))$ e *uniform convergent* pe mulţimea A către funcţia $f(x)$, dacă oricare ar fi $\varepsilon>0$, există un număr $N=N(\varepsilon)$ (care depinde de ε), astfel ca

(2.20) $$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \text{ dacă } n>N(\varepsilon),\ \forall x\in A.$$

şi notăm

$$f_n(x) \xrightarrow{u} f(x).$$

Criteriul I (al lui Cauchy). *O condiţie necesară şi suficientă ca şirul de funcţii* $(f_n(x))$ *să fie uniform convergent pe mulţimea* A, *este ca pentru orice număr* $\varepsilon>0$ *să existe un număr* $N(\varepsilon)$ *astfel ca*

(2.21) $$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon \text{ dacă } n>N(\varepsilon),\ \forall x\in A \text{ şi } p\geqslant 1.$$

Dacă $f_n \xrightarrow{u} f$ pe mulţimea A, oricare ar fi $\varepsilon>0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel ca, dacă $n>N(\varepsilon)$ şi $x\in A$

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ |f_{n+p}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ \forall p\geqslant 1,$$

încît

$$|f_{n+p}(x)-f(x)|=|(f_{n+p}(x)-f(x))+(f(x)-f_n(x))|\leqslant$$

$$\leqslant|f_{n+p}(x)-f(x)|+|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

astfel că, condiţia (2.21) e necesară.

Dacă condiţia (2.21) este îndeplinită, rezultă că $\forall x\in A$ şirul $(f_n(x))$ este convergent. Deci există o funcţie $f(x)$ astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x).$$

Notînd

(2.22) $$f_{n+p}(x)-f_n(x)=\Delta_{n,p}(x),$$

din (2.21) deducem

(2.23) $$|\Delta_{n,p}(x)|<\varepsilon \text{ dacă } n>N(\varepsilon),\ \forall x\in A \text{ şi } p\geqslant 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Trecînd în (2.22) la limită pentru $p\to\infty$ obținem

$$\lim_{p\to\infty}[f_{n+p}(x)-f_n(x)]=\lim_{p\to\infty}\Delta_{n,p}(x).$$

Rezultă că

$$|f(x)-f_n(x)|=|\lim_{p\to\infty}\Delta_{n,p}(x)|=\lim_{p\to\infty}|\Delta_{n,p}(x)|$$

și avînd în vedere (2.23) deducem că

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \text{ dacă } n>N(\varepsilon),\ \forall x\in A,$$

astfel că șirul (f_n) este uniform convergent pe A și deci (2.21) este o condiție suficientă de uniform convergență.

Convergența simplă a unui șir exprimă o proprietate punctuală a funcțiilor șirului, convergența șirului fiind condiționată de fiecare punct în parte ; convergența uniformă este însă o proprietate caracterizînd comportamentul funcțiilor nu într-un punct izolat, ci pe o întreagă mulțime. În acest sens observăm că condiția de convergență uniformă (2.21) se referă la toate punctele mulțimii A, pe cînd condiția (2.19), de convergență simplă, se referă la fiecare punct în parte.

Teoremă. *Limita unui șir (f_n) de funcții continue, uniform convergente pe mulțimea A, este o funcție continuă pe A.*

Deoarece $f_n \xrightarrow{u} f$, există un număr $N=N(\varepsilon)$ astfel ca

$$|f_N(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad \forall x\in A. \tag{2.24}$$

În particular din (2.24) luînd $x=a$ obținem

$$|f_N(a)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.24'}$$

Cum $f_N(x)$ e continuă pe A, dacă $x\in A$ există un număr $\eta(\varepsilon)$ astfel ca pentru $\forall x\in A$.

$$|f_N(x)-f_N(a)|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{dacă} \quad |x-a|<\eta(\varepsilon) \tag{2.24''}$$

În aceste condiții, avînd în vedere (2.24), (2.24') și (2.24''), deducem

$$|f(x)-f(a)|=|[f(x)-f_N(x)]+[f_N(x)-f_N(a)]+[f_N(a)-f(a)]|\leqslant$$

$$\leqslant|f_N(x)-f(x)|+|f_N(x)-f_N(a)|+|f_N(a)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Deci, $\forall x\in A$

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon \text{ dacă } |x-a|<\eta(\varepsilon)$$

și funcția $f(x)$ este continuă în punctul a. Punctul $a\in A$ fiind arbitrar, funcția $f(x)$ este continuă pe mulțimea A.

Exemplu. Considerăm șirul de funcții

$$\frac{1-x}{1+x},\ \frac{1-x^2}{1+x^2},\ \ldots,\ \frac{1-x^n}{1+x^n},\ \ldots, \tag{2.25}$$

definit pe mulțimea $A=R\setminus\{1\}$.

Scanned with OKEN Scanner

El este convergent pe mulțimea A :

— dacă $|x|<1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1+x^n}=1$,

— dacă $x=1$, $f_n(x)=0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$,

— dacă $|x|>1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^n}-1}{\frac{1}{x^n}+1}=-1$

și funcția limită este

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & x=1\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$$

o funcție discontinuă în punctul $x=1$, dar continuă pe intervalele $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$, $(-\infty, -1)$ (vezi graficul din fig. 2.2).

Șirul (2.25) e un șir de funcții continue pe mulțimea A, limita sa este însă discontinuă pe A. Înseamnă că acest șir, convergent pe mulțimea A, nu e uniform convergent pe A.

Într-adevăr, pentru ca șirul (f_n) să fie uniform convergent pe A se impune ca, $\forall x\in A$ și $\varepsilon>0$, să existe un număr $N(\varepsilon)$ astfel ca

$$(2.26)\qquad |f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{1-x^n}{1+x^n}-1\right|=\left|\frac{2x^n}{1+x^n}\right|=\frac{2}{\left|1+\frac{1}{x^n}\right|}<\varepsilon, \text{ dacă } n>N(\varepsilon).$$

Considerînd punctul $x=1-\frac{1}{p}=\frac{p-1}{p}\in A$, unde $p>n>N(\varepsilon)$,

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{2}{1+\left(\frac{p}{p-1}\right)^n}=\frac{2}{1+\left(1+\frac{1}{p-1}\right)^n}>\frac{2}{1+\left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{p-1}},$$

cum

$$\lim_{p\to\infty}=\frac{2}{1+\left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{p-1}}=\frac{2}{1+e},$$

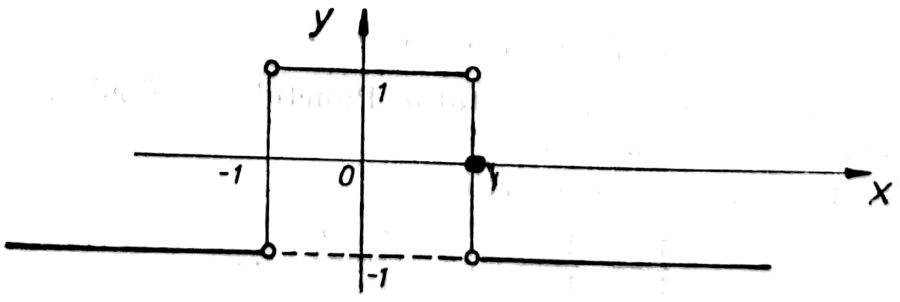


Fig. 2.2.

Scanned with OKEN Scanner

rezultă că în punctul $x=1-\frac{1}{p}$, unde $p>n$

$$|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon.$$

Condiția (2.26) de convergență nu e satisfăcută, deci șirul $(f_n'(x))$ nu e uniform convergent pe A, ceea ce explică faptul că limita $f(x)$ a șirului (f_n) nu e continuă pe A.

Funcția $f(x)$ e însă continuă pe $(-1, 1)$, fapt datorat convergenței uniforme pe intervalul $(-1, 1)$ a șirului.

Convergența uniformă pe $(-1, 1)$ rezultă dacă arătăm că șirul (f_n) este uniform convergent pe orice segment $[-R, +R]$, unde $0<R<1$.

Considerînd R_1 astfel ca $R<R_1<1$ și $x\in[-R, R]$

$$\left|1+\frac{1}{x^n}\right|>\left|\frac{1}{x^n}\right|-1\geqslant\frac{1}{R_1^n}-1.$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty} R_1^n=0\Rightarrow R_1^n<\varepsilon \text{ dacă } n>N(\varepsilon),$$

din (2.26) deducem

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{2}{\left|1+\frac{1}{x^n}\right|}<\frac{2}{\frac{1}{R_1^n}-1}<\frac{2}{\frac{1}{\varepsilon}-1}=\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}=\varepsilon_1,\ \forall n>N(\varepsilon).$$

Șirul (f_n) e uniform convergent pe $[-R, +R]$, oricare ar fi $R<1$, e deci uniform convergent pe $(-1, 1)$.

Dăm fără demonstrație următoarea teoremă care exprimă o proprietate importantă a șirurilor de funcții.

Teoremă. *Dacă șirul de funcții $(f_n(x))$, derivabile pe intervalul I mărginit, este convergent în punctul $x_0\in I$, iar șirul derivatelor $(f'(x))$ e uniform convergent pe I către o funcție $g(x)$, atunci și șirul $(f_n(x))$ e uniform convergent pe I către o funcție $f(x)$, derivabilă pe I, derivata sa fiind $g(x)$.*

Se scrie

$$(\lim_{n\to\infty} f_n(x))'=\lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Teorema se numește „teorema de derivare termen cu termen a șirurilor de funcții"; ea exprimă faptul că derivata limitei este egală cu limita derivatelor.

Este posibil ca limita unui șir de funcții să fie derivabilă chiar dacă șirul derivatelor nu e uniform convergent.

Astfel, în cazul șirului de funcții $\left(\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\right)$, $x\in(-\pi, \pi)$, cum

(2.26)
$$\left|\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\right|<\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon \text{ dacă } n>\frac{1}{\varepsilon^2},$$

Scanned with OKEN Scanner

conform lui (2.26), el e uniform convergent către funcția $f(x)=0$, o funcție derivabilă, în condițiile în care șirul derivatelor

$$\cos x,\ \sqrt{2}\cos 2x,\ \ldots,\ \sqrt{n}\cos nx,\ \ldots$$

nu e convergent.

2.4. SERII DE FUNCȚII

Fie șirul de funcții $(f_n(x))$ definite pe mulțimea $A\subset R$. Simbolul

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots \tag{2.27}$$

se numește *serie de funcții* și se mai notează

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \text{sau} \quad \sum_{n\in N} f_n \quad \text{sau} \quad \sum f_n.$$

Pentru $x=a\in A$, (2.27) devine

$$f_1(a)+f_2(a)+\ldots+f_n(a)+\ldots$$

serie numerică. O serie de funcții este deci echivalentă cu o familie de serii numerice.

Vom considera șirul de funcții $(s_n(x))$ definit pe A, unde

$$s_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$$

e numit *șirul sumelor parțiale* al seriei (2.27) și vom spune că:

— seria $\sum f_n$ e *convergentă* în punctul $a\in A$, dacă șirul de funcții $(s_n(x))$ e convergent în punctul a; a se numește *punct de convergență al seriei.*

— seria $\sum f_n$ e *absolut convergentă* în punctul $a\in A$, dacă seria $\sum|f_n|$ e convergentă în a.

Mulțimea $B\subset A$ a punctelor de convergență ale seriei $\sum f_n$ se numește *mulțimea de convergență a seriei.*

Definiții: Fie seria de funcții $\sum f_n$ definite pe mulțimea A și funcția $f(x)$ definită pe $B\subset A$.

1^0. Vom spune că seria e *simplu (punctual) convergentă* pe B către funcția $f(x)$ dacă șirul sumelor parțiale $(s_n(x))$ este simplu convergent pe B către $f(x)$, adică, oricare ar fi $\varepsilon>0$

$$|s_n(x)-f(x)|<\varepsilon \text{ dacă } n>N(\varepsilon, x),\ \forall x\in B.$$

Scanned with OKEN Scanner

2^0. Vom spune că seria e *uniform convergentă* pe B către funcţia $f(x)$ dacă şirul sumelor parţiale $(s_n(x))$ e uniform convergent pe B către $f(x)$, adică, oricare ar fi $\varepsilon>0$

$$|s_n(x)-f(x)|<\varepsilon \text{ dacă } n>N(\varepsilon),\ \forall x\in B.$$

Astfel fiind definită convergenţa uniformă a seriilor de funcţii, bazîndu-ne pe convergenţa uniformă a şirurilor de funcţii, deducem următoarele criterii de convergenţă şi teoreme :

Criteriul I (al lui Cauchy). *Seria de funcţii $\sum f_n$, definite pe mulţimea A, e uniform convergentă pe A, dacă şi numai dacă, oricare ar fi $\varepsilon>0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel ca*

$$|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\ldots+f_{n+p}(x)|<\varepsilon, \tag{2.28}$$

dacă $n>N(\varepsilon)$, $\forall x\in A$ şi $p\geqslant 1$.

Seria e uniform convergentă pe A dacă şi numai dacă şirul $(s_n(x))$ e uniform convergent pe A, deci dacă, oricare ar fi $\varepsilon>0$,

$$|s_{n+p}(x)-s(x)|<\varepsilon \text{ dacă } n>N(\varepsilon),\ \forall x\in A \text{ şi } p\geqslant 1. \tag{2.29}$$

Cum

$$s_{n+p}(x)-s_n(x)=f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\ldots+f_{n+p}(x),$$

din (2.29) obţinem condiţia de convergenţă uniformă (2.28).

Criteriul II. *Fie seria de funcţii $\sum f_n$ definite pe mulţimea A şi seria cu termeni pozitivi $\sum a_n$, convergentă.*

Dacă există un număr N astfel ca

$$|f_n(x)|\leqslant a_n,\ \forall n\geqslant N \text{ şi } x\in A, \tag{2.30}$$

seria $\sum f_n$ e uniform convergentă pe mulţimea A.

Cum seria $\sum a_n$ e convergentă, oricare ar fi $\varepsilon>0$, există un număr $N_1(\varepsilon)$ astfel ca

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}<\varepsilon, \text{ dacă } n>N_1(\varepsilon),\ \forall p\geqslant 1.$$

Avînd în vedere (2.30) rezultă, luînd $N_1(\varepsilon)\geqslant N$, că $\forall x\in A$,

$$|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\ldots+f_{n+p}(x)|\leqslant|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\ldots+|f_{n+p}(x)|<$$
$$<a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}<\varepsilon, \text{ dacă } n>N_1(\varepsilon),\ \forall p\geqslant 1$$

şi, conform criteriului I de convergenţă, seria $\sum f_n$ e uniform convergentă pe A.

Teorema 1. *Dacă funcţiile f_n, $n\in N$, sînt continue pe mulţimea A şi seria $\sum f_n$ e uniform convergentă pe A, funcţia limită e continuă pe A.*

Sumele parţiale $s_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$ formează un şir de funcţii continue, uniform convergent pe A. Limita şirului, deci funcţia limită a seriei $\sum f_n$ e continuă pe A.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 2. *Dacă funcțiile f_n, $n\in N$, sînt derivabile pe intervalul I mărginit și seria derivatelor $\sum f_n'$ e uniform convergentă pe I către funcția g, atunci, dacă seria $\sum f_n$ e convergentă într-un punct $x_0\in I$, ea e uniform convergentă pe I către o funcție f, derivabilă pe I și $f'=g$.*

Funcțiile $s_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$ sînt derivabile pe I, șirul derivatelor $(s_n'(x))$ fiind uniform convergent pe I către funcția g. Cum șirul $(s_n(x))$ e convergent în $x_0\in I$, rezultă că el e uniform convergent pe I către o funcție f și $f'=g$. Deci seria $\sum f_n$ este uniform convergentă pe I către f și $f'=g$.

Teorema se numește *teorema de derivare termen cu termen a seriilor de funcții* și se scrie

$$(\sum f_n)'=\sum f_n'.$$

Exemplu. Fie seria de funcții $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, unde

$$f_n=\frac{2x^n(1-x)}{(x^n+1)(x^{n-1}+1)}, \qquad x\neq -1.$$

Pentru a scrie șirul sumelor parțiale $s_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)$ vom lua

$$f_n(x)=\frac{2x^n-2x^{n+1}}{(x^n+1)(x^{n-1}+1)}=\frac{Ax^n+B}{x^n+1}+\frac{Cx^{n-1}+D}{x^{n-1}+1},$$

de unde, prin identificarea coeficienților deducem sistemul de condiții $A+C=0$, $A+D=-2$, $B+C=2$, $B+D=0$, pentru care, o soluție este $A=-1$, $B=1$, $C=1$, $D=-1$, încît

$$f_n(x)=\frac{1-x^n}{1+x^n}-\frac{1-x^{n-1}}{1+x^{n-1}},$$

iar

$$s_n(x)=\frac{1-x}{1+x}+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}-\frac{1-x}{1+x}\right)+\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}-\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1-x^n}{1+x^n}-\frac{1-x^{n-1}}{1+x^{n-1}}\right).$$

Făcînd reducerile obținem

$$s_n(x)=\frac{1-x^n}{1+x^n},\ x\in R\setminus\{-1\}.$$

Șirul $(s_n(x))$ e convergent (dar nu și uniform convergent) către funcția

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & x=1\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$$

care e discontinuă pe $R\setminus\{-1\}$ (vezi exemplul 2.25).

Seria $\sum f_n$ este deci convergentă pe $R\setminus\{-1\}$, nu însă și uniform convergentă, fapt care explică discontinuitatea funcției limită. Șirul $(s_n'(x))$ e uniform convergent pe intervalul $(-1, 1)$, astfel că seria $\sum f_n$ este uniform convergentă pe acest interval și funcția limită $f(x)$ e continuă $(f(x)=1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Seria derivatelor $\sum f_n'$ are şirul sumelor parţiale

$$s_n'(x)=\frac{-2nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

uniform convergent pe intervalul $(-1,\ 1)$, către funcţia $g(x)=0$. Într-adevăr, $\forall x\in[-R,\ +R],\ 0<R<1$

$$|s_n'(x)-g(x)|=\left|\frac{-2n\,x^{n-1}}{1+x^{2n}+2x^n}\right|<\frac{2n\,|x^{n-1}|}{1+2x^n}<\frac{2n\,R^{n-1}}{1-2R^n}=\frac{2n\,R^{\frac{n-1}{2}}\cdot R^{\frac{n-1}{2}}}{1-2R^n}$$

şi cum :

$$\lim_{n\to\infty} R^n=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}(nR^{\frac{n-1}{2}})=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{n-1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{n-3}{2}}}=0,\quad\left(\frac{1}{R}>1\right),$$

există un număr N_1 astfel ca $\forall n>N_1$

$$\begin{cases} R^n<\dfrac{\alpha}{2} \\ n\,R^{\frac{n-1}{2}}<\dfrac{\alpha}{2} \end{cases},\quad 0<\alpha<1,$$

încît

$$|s_n'(x)-g(x)|<\frac{\alpha R^{\frac{n-1}{2}}}{1-\alpha}<\varepsilon\quad\text{dacă}\quad R^{\frac{n-1}{2}}<\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\alpha}.$$

Deci dacă

$$n>1+\frac{2\log\left|\frac{1}{\alpha}-1\right|\varepsilon}{\log R}=N(\varepsilon)\ \text{şi}\ n>N_1$$

$$|s_n'(x)-g(x)|<\varepsilon,\ \forall x\in[-R,\ +R]$$

şi seria $\sum f_n'$ e uniform convergentă către $g(x)=0$, pe intervalul $(-1,\ 1)$. Rezultă că seria $\sum f_n$, convergentă de exemplu în punctul $x=0$, e uniform convergentă pe $(-1,\ 1)$ către funcţia continuă $f(x)=1$, care derivată este $f'(x)=0=g(x)$, $\forall x\in(-1,\ 1)$.

Operaţii cu serii de funcţii. Dacă seriile $\sum f_n$ şi $\sum g_n$ sînt convergente, respectiv pe A_1 şi A_2 către funcţiile f şi g atunci :

1^0. seria $\sum(f_n+g_n)$ e convergentă pe $A_1\cap A_2$ către funcţia $f+g$,

2^0. seria $\sum\alpha f_n$, $\alpha\in R$, e convergentă pe A_1 către funcţia αf.

Afirmaţiile rezultă imediat, socotind seriile de funcţii $\sum f_n(x)$ şi $\sum g_n(x)$ ca o familie de serii numerice şi folosind proprietăţile legate de operaţii cu seriile numerice.

Scanned with OKEN Scanner

2.5. SERII DE PUTERI

O serie de funcții de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + \tag{2.31}$$

$$+ a_2 (x-x_0)^2 + \ldots + a_n (x-x_0)^n + \ldots,$$

unde $a_n \in R$ se numește *serie de puteri centrată în punctul* x_0.

Întrucît prin substituția $x-x_0=y$, seria (2.31) se reduce la o serie de tipul

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n + \ldots, \tag{2.31'}$$

numită *serie de puteri centrată în punctul zero*, vom studia acest tip de serii, rezultatele putînd fi folosite și pentru seriile de forma (2.31).

Teorema lui Abel. *Există un număr* $R \geqslant 0$, *finit sau infinit, astfel că seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

1^0. *e absolut convergentă pe intervalul* $(-R, R)$,

2^0. *e divergentă în punctele* x *pentru care* $|x|>R$,

3^0. *e uniform convergentă pe intervalul* $[-r, r]$, $0<r<R$.

Seria e convergentă în punctul $x=0$. Dacă $x=0$ e singurul punct de convergență, atunci $R=0$ și teorema e demonstrată. Dacă nu, fie $x_0 \neq 0$ punct de convergență. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ fiind convergentă, termenul general al seriei tinde la zero, deci putem considera că termenii seriei sînt mărginiți, adică, există un număr $M>0$ astfel ca

$$|a_n x_0^n| < M, \quad n=0, 1, 2 \ldots$$

Dacă $x \in (-|x_0|, |x_0|)$

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n, \quad \forall n \geqslant 0,$$

și cum $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ e convergentă, conform criteriului comparației și seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e convergentă. Rezultă că dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e convergentă în x_0, ea e absolut convergentă în orice punct $x \in (-|x_0|, |x_0|)$. Deci mulțimea A de convergență, dacă conține punctul x_0, va conține un întreg interval $(-|x_0|, |x_0|)$, în care seria e absolut convergentă.

1^0. Considerăm $R=\sup A$ și $x \in (-R, +R)$; există un număr $x_0 \in A$ astfel ca $|x| < x_0 < R$. Cum x_0 e punct de convergență al seriei, din cele arătate mai sus, rezultă că seria e absolut convergentă pe intervalul $(-x_0, x_0)$, deci și în punctul x; x fiind un punct arbitrar din $(-R, +R)$, seria e absolut convergentă pe $(-R, +R)$.

Scanned with OKEN Scanner

2^0. Dacă $|x|>R$ şi x ar fi punct de convergenţă al seriei, atunci, pentru orice x_0 astfel ca $R<x_0<|x|$ seria ar fi convergentă, deci $x_0 \in A$ şi R nu e $supA$, ceea ce contrazice ipoteza. Rezultă că seria e divergentă în orice punct x pentru care $|x|>R$.

Fiind satisfăcute proprietăţile 1^0 şi 2^0 vom spune că R e *raza de convergenţă a seriei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

3^0. Dacă $0<r<R$, r e punct de convergenţă absolută, adică seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$$

e convergentă ; cum pentru orice $x \in [-r, r]$

$$|a_n x^n| = |a_n|\,|x^n| \leqslant |a_n| r^n,$$

conform criteriului II de convergenţă uniformă a seriilor de funcţii, seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e uniform convergentă pe $[-r, r]$.

Observaţie. Teorema lui Abel nu precizează natura seriei în punctele $+R$ şi $-R$; e posibil ca seria să fie convergentă în ambele puncte, în unul sau în nici unul.

Dacă însă seria e absolut convergentă în unul din aceste puncte, ea este absolut convergentă şi în celălalt punct, deoarece pentru ambele serii $\sum a_n R^n$ şi $\sum a_n (-R)^n$, seria modulelor este $\sum |a_n| R^n$. Deducem astfel că dacă în unul din punctele $-R$, $+R$ seria e divergentă, în celălalt punct seria nu e absolut convergentă.

Pentru a stabili mulţimea de convergenţă a unei serii de puteri, aşa cum rezultă din teorema lui Abel, e necesar să determinăm raza de convergenţă R, în care sens dăm următoarele teoreme :

Teorema 1. *Fie seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Dacă există* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$ (λ — *finit sau infinit*), *atunci*

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{dacă } 0<\lambda<\infty \\ 0, & \text{dacă } \lambda=\infty \\ \infty, & \text{dacă } \lambda=0. \end{cases}$$

Dacă $x_0 \in (-R, +R)$, seria numerică cu termeni pozitivi

$$\sum |a_n x_0^n|$$

e convergentă. Această serie e convergentă (vezi criteriul D'Alembert §2.2.5) dacă

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x_0| < 1,$$

deci pentru orice punct x_0 pentru care

$$|x_0| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\lambda}. \tag{2.32}$$

Din (2.32) rezultă : $R=\frac{1}{\lambda}$ dacă λ e finit ; dacă $\lambda=\infty \Rightarrow R=0$ și mulțimea de convergență se reduce la punctul $x=0$; dacă $\lambda=0 \Rightarrow R=\infty$ și mulțimea de convergență e întreaga axă reală.

Teorema 2. *Fie seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Dacă există* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}=\lambda$ (λ — *finit sau infinit*), *atunci*

$$R=\begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{dacă} \quad 0<\lambda<\infty \\ 0, & \text{dacă} \quad \lambda=\infty \\ \infty, & \text{dacă} \quad \lambda=0. \end{cases}$$

Dacă $x_0\in(-R, +R)$, seria numerică cu termeni pozitivi

$$\sum|a_n x_0^n|$$

e convergentă. Această serie e convergentă (vezi criteriul Cauchy, § 2.2.5) dacă

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x_0^n|}=\lim_{n\to\infty} |x_0| \sqrt[n]{|a_n|}<1,$$

deci pentru orice punct x_0 pentru care

$$|x_0|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lambda}. \tag{2.33}$$

Din (2.33) rezultă : $R=\frac{1}{\lambda}$ dacă e finit ; dacă $\lambda=\infty \Rightarrow R=0$ și mulțimea de convergență se reduce la punctul $x=0$; dacă $\lambda=0 \Rightarrow R=\infty$ și mulțimea de convergență e întreaga axă reală.

Aplicații. Să se determine raza de convergență a seriilor :

I. $\sum_{n=0}^{\infty} = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ (seria geometrică).

Cum $a_n=1$,

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=1.$$

Regăsim un rezultat cunoscut : seria geometrică e convergentă pe mulțimea $A=(-1, +1)$.

II. $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$

Cum $a_n=\frac{1}{n}$,

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}}=1$$

și mulțimea de convergență este intervalul $(-1, 1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Nu e preferabil să aplicăm formula

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}},$$

întrucît e necesar să cunoaştem $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$. Cunoscînd însă că $R=1$ rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

În punctul $x=1$ seria e divergentă (se obţine seria armonică); în punctul $x=-1$ seria e convergentă (se obţine seria armonică alternată).

III. $$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Cum $$a_n=\frac{1}{n!}$$

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}}=\infty,$$

mulţimea de convergenţă este $(-\infty, \infty)$.

Şi în acest caz, pentru aplicarea formulei

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!},$$

trebuie să cunoaştem $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$. Întrucît $R=\infty$, deducem că

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty.$$

IV. $$1+ax+abx^2+a^2bx^3+a^2b^2x^4+\ldots+a^nb^{n-1}x^{2n-1}+a^nb^nx^{2n}+\ldots,$$

$$a>0,\quad b>0.$$

Şirul $(U_n)_n=(\sqrt[n]{|a_n|})_n$ are termenii de indice impar $U_{2n-1}=\sqrt[2n-1]{a^nb^{n-1}}=a^{\frac{n}{2n-1}}b^{\frac{n-1}{2n-1}}$, iar termenii de indice par $U_{2n}=\sqrt[2n]{a^nb^n}=a^{\frac{n}{2n}}b^{\frac{n}{2n}}$ astfel că $U_{2n-1}\to a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$ şi $U_{2n}\to a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; deci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt{ab}$ şi $R=\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Proprietăţile seriilor de puteri le stabilim avînd în vedere proprietăţile seriilor de funcţii, seriile de puteri fiind un caz particular al acestora. Deducem astfel:

1) *Funcţia limită a unei serii de puteri e o funcţie continuă pe intervalul de convergenţă al seriei.*

Pe orice interval $[-r, r]\subset(-R, +R)$ seria e uniform convergentă; termenii seriei sînt funcţiile continue $f_n=a_nx^n$, încît funcţia limită a seriei e continuă pe $[-r, +r]$, deci pe $(-R, +R)$.

Proprietatea demonstrată nu precizează continuitatea sumei seriei în punctele $-R$ şi $+R$.

Dacă seria e convergentă, de exemplu, în punctul $x=R$, ea va fi uniform convergentă pe intervalul $(-R, R]$ şi suma sa e continuă pe acest interval. Vom avea deci

$$\lim_{\substack{x\to R\\ x<R}} f(x)=f(R).$$

Această proprietate se formulează similar şi pentru extremitatea din stînga a intervalului de convergenţă.

2) *Dacă seria* $\sum a_nx^n$ *are suma* $s(x)$, *atunci*:

a) *seria derivatelor are aceeaşi rază de convergenţă,*

b) *funcţia* $s'(x)$ *e derivabilă pe intervalul de convergenţă şi derivata sa este egală cu suma seriei derivatelor.*

a) Raza de convergenţă a seriei $\sum a_nx^n$ e $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$, iar a seriei derivatelor $\sum na_nx^{n-1}=\dfrac{1}{x}\sum na^nx^n$ este

$$R_1=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)\,a_{n+1}}{na_n}\right|}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\cdot\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=R.$$

b) Seria derivatelor e uniform convergentă pe orice interval $[-r, r]\subset(-R, +R)$ către funcţia $\sigma(x)$; seria $\sum a_nx^n$, fiind convergentă într-un punct $x_0\in[-r, r]$, e uniform convergentă pe $[-r, r]$ către funcţia $s(x)$, derivabilă pe $[-r, r]$, derivata sa fiind $s'(x)=\sigma(x)$. Cum afirmaţiile sînt valabile pentru orice interval $[-r, r]$, rezultă că $s(x)$ e derivabilă pe $(-R, +R)$ şi derivata sa, pe $(-R, +R)$, este $s'(x)=\sigma(x)$.

Conform acestei teoreme, putem deriva o serie termen cu termen — obţinem o serie care are ca sumă derivata sumei seriei iniţiale. Deci

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=s'(x).$$

Repetînd raţionamentul, plecăm de la derivata de ordinul I a seriei pe care o derivăm, apoi de la derivata de ordinul II, ş.a.m.d. şi deducem:

Teorema. a) *Seria de puteri şi seria derivatelor de ordinul n au aceeaşi rază de convergenţă.*

b) *Suma seriei este indefinit derivabilă pe intervalul de convergenţă şi derivata de ordinul n a ei este egală cu suma seriei derivatelor de ordinul n.*

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. Plecînd de la seria geometrică, al cărei interval de convergență este $(-1, 1)$, prin derivare deducem că, pentru orice $x\in(-1, 1)$ avem

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots$$

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$$

$$f''(x)=\frac{1\cdot 2}{(1-x)^3}=1\cdot 2+3\cdot 2x+4\cdot 3x^2+\ldots+n(n-1)x^{n-2}+\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(p)}(x)=\frac{p!}{(1-x)^{p+1}}=p!+\frac{(p+1)!}{1!}x+\frac{(p+2)!}{2!}x^2+\ldots+$$

$$+\frac{(p+n)!}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(p+n)!}{n!}x^n.$$

În egalitatea

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(p+n)!}{n!}x^n=\frac{p!}{(1-x)^{p+1}},\qquad \begin{matrix}x\in(-1,\ 1)\\ p=0,\ 1,\ 2\ldots.\end{matrix}$$

înlocuind pe x cu : $-x$, x^2 ..., obținem alte serii de puteri și sumele lor.

2.6. FORMULA LUI TAYLOR. SERIA TAYLOR, SERIA MAC-LAURIN

2.6.1. FORMULA LUI TAYLOR

Fie funcția $f:[a, b]\to R$, cu derivată de ordinul $(n+1)$ pe (a, b) și derivată de ordinul n, continuă pe $[a, b]$.

Cu ipotezele făcute, funcția

$$F(x)=f(x)+\frac{b-x}{1!}f'(x)+\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)+\ldots+\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}_{(a)}+(b-x)^p A, \tag{2.34}$$

unde A e dat de egalitatea

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{n)}_{(a)}+(b-a)^p A, \tag{2.35}$$

satisface condițiile din teorema lui Rolle :

1) $F(x)$ e continuă pe $[a, b]$,
2) e derivabilă pe (a, b),
3) $F(b)=F(a)$.

Scanned with OKEN Scanner

Egalitatea 3) rezultă din (2.34), de unde deducem, avînd în vedere (2.35), că

$$F(b)=f(b)=F(a).$$

Conform teoremei lui Rolle, există un punct $\xi\in(a, b)$ astfel ca $F'(\xi)=0$. Prin derivare, din (2.34), după reducerea termenilor asemenea, obținem

$$F'(x)=\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}_{(x)}-p(b-x)^{p-1}A.$$

Cum

$$F'(\xi)=0,$$

$$A=\frac{(b-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}_{(\xi)},\quad a<\xi<b.$$

Dacă luăm $p=n+1$, obținem

$$A=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}_{(\xi)}$$

și din (2.35) deducem egalitatea

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}_{(a)}+R_n, \tag{2.36}$$

numită *formula lui Taylor de ordinul n*, în care

$$R_n=\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}_{(\xi)},\quad a<\xi<b$$

este *restul Lagrange de ordinul n* al formulei lui Taylor.

Dacă luăm $p=1$, obținem

$$A=\frac{(b-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}_{(\xi)}$$

și în (2.36) R_n va fi

$$R_n=\frac{(b-a)(b-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}_{(\xi)},\quad a<\xi<b, \tag{2.37}$$

restul Cauchy de ordinul n din formula lui Taylor.

Dacă îl înlocuim pe b cu $x\in(a, b)$, $R_n=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}_{(\xi)}$ și din (2.36) obținem

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+ \tag{2.36'}$$

$$+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}_{(a)}+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}_{(\xi)},$$

formula lui Taylor de ordinul n corespunzătoare funcției $f(x)$ în punctul a, sau *dezvoltarea funcției $f(x)$ cu formula lui Taylor*. Numărul $\xi\in(a, x)$ și se exprimă de obicei sub forma $\xi=a+\theta(x-a)$, unde $0<\theta<1$.

Scanned with OKEN Scanner

În formula (2.36′) expresia restului lui Cauchy este

$$R_n=\frac{(x-a)\,(x-\xi)^n}{n!}\,f^{(n+1)}_{(\xi)},\qquad a<\xi<x \tag{2.37′}$$

și se obține din (2.37) unde se înlocuiește b cu x.

Dacă în (2.36) se înlocuiește b cu $a+x$ $(a+x\leqslant b)$, obținem formula lui Taylor sub forma

$$f(a+x)=f(a)+\frac{x}{1!}f'(a)+\frac{x^2}{2!}f''(a)+\ldots \tag{2.36″}$$

$$\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}_{(a)}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}_{(\xi)},$$

în care $\xi=a+\theta x$, unde $0<\theta<1$.

Luînd în (2.36) $n=0$, obținem

$$f(b)-f(a)=(b-a)\,f'(\xi),\qquad a<\xi<b,$$

formula creșterilor finite (formula lui Lagrange).

În (2.36′) neglijînd restul R_n obținem

$$f(x)\approx f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}_{(a)},$$

o aproximare printr-un polinom a funcției $f(x)$, cu o eroare ce nu depășește $\sup_{x\in[a,\,b]}\{|R_n(x)|\}$.

Luînd în (2.36′) $a=0$, obținem

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots \tag{2.36‴}$$

$$\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}_{(0)}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}_{(\xi)},\quad 0<\xi<x,$$

formula lui Mac-Laurin (dezvoltarea cu formula lui Taylor a funcției $f(x)$ în punctul zero).

În acest caz, din (2.37′) luînd $a=0$, obținem

$$R_n=\frac{x\,(x-\xi)^n}{n!}\,f^{(n+1)}_{(\xi)},\quad 0<\xi<x, \tag{2.37″}$$

expresia restului lui Cauchy din formula lui Mac-Laurin.

2.6.2. APLICAȚII ALE FORMULEI LUI TAYLOR

a) **Rădăcini multiple ale unui polinom.** Polinomul $P_n(x)$, de grad n, are rădăcină $x=a$, multiplă de ordinul m $(m\leqslant n)$, dacă și numai dacă

$$(\alpha)\quad P_n(x)=(x-a)^m\,Q(x),$$

unde $Q(x)$ e un polinom ce nu se divide cu $x-a$.

Scanned with OKEN Scanner

Scriind formula lui Taylor de ordinul n a polinomului $P_n(x)$ în punctul a, cum $P_{(x)}^{(n+1)}=0$, restul de ordinul n va fi nul și

$$P_n(x)=P_n(a)+\frac{x-a}{1!}P_n'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}P_n''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}P_n^{(n)}(a).$$

Condiția (σ) e îndeplinită dacă și numai dacă

$$P_n(a)=0,\ P_n'(a)=0,\ \ldots,\ P_n^{(m-1)}=0,\ P_n^{(m)}(a)\neq 0.$$

Deci $x=a$ e rădăcină multiplă de ordinul m dacă și numai dacă polinomul și primele $(m-1)$ derivate se anulează în punctul a, iar derivata de ordinul m e diferită de zero în a.

b) Condiții necesare și suficiente de extremum. Punctul $a\in I$ e *punct de extrem (local)* al funcției $f: I\to R$, dacă există o vecinătate $V(a)$ a lui a astfel ca

(2.38) $$f(x)-f(a)\leqslant 0,\ \forall x\in V(a)\cap I \qquad (a \text{ — punct de maxim})$$

sau

(2.38′) $$f(x)-f(a)\geqslant 0,\ \forall x\in V(a)\cap I \qquad (a \text{ — punct de minim}),$$

înțelegînd prin *vecinătate a punctului a* o mulțime $V(a)$ care include un interval (α,β) care-l conține pe a: $a\in(\alpha,\beta)\subset V(a)$.

Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem local ale funcției, interioare intervalului I, anulează derivata întîi a funcției, deci se află printre punctele staționare ale funcției, înțelegînd prin *punct staționar* al unei funcții un punct interior mulțimii de definiție, care anulează derivata întîi a funcției.

Spunem că un punct a e punct *interior unei mulțimi* $A\subset R$, dacă el aparține mulțimii împreună cu un întreg interval: $a\in(\alpha,\beta)\subset A$.

Teorema lui Fermat exprimă deci doar o condiție necesară ca un punct interior mulțimii de definiție, să fie punct de extrem — aceea de a fi punct staționar.

Pentru a decide dacă un punct staționar e, sau nu, punct de extrem, se impune studiul variației funcției în vecinătatea punctului staționar, deci studiul semnului derivatei întîi.

Vom da o teoremă prin care se determină punctele de extrem ale unei funcții, utilizînd derivatele de ordin superior ale acesteia.

Teoremă. *Fie $f: I\to R$ o funcție derivabilă de $n+1$ ori $(n\geqslant 1)$ într-o vecinătate a punctului $a\in I$. Presupunem că*

(2.39) $$f'(a)=0,\ f''(a)=0,\ \ldots,\ f^{(n-1)}(a)=0,\ f^{(n)}(a)\neq 0.$$

1^0. *Dacă n e par, a e punct de extrem :*

a) *de minim dacă* $f^{(n)}(a)>0$,

b) *de maxim dacă* $f^{(n)}(a)<0$.

2^0. *Dacă n e impar și a e interior intervalului I, punctul a nu e punct de extrem.*

Avînd în vedere (2.39), formula lui Taylor de ordinul n corespunzătoare funcției f în punctul a este

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n)}(\xi)$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci

$$f(x)-f(a)=\frac{(x-a)^n}{n!}[f^{(n)}(a)+\alpha(x)], \tag{2.40}$$

unde $\alpha(x)=\frac{x-a}{n+1}f^{(n+1)}(\xi)\to 0$ cînd $x\to a$. Există deci o vecinătate $V(a)$ a punctului a astfel ca semnul sumei $f^{(n)}(a)+\alpha(x)$ să fie semnul lui $f^{(n)}(a)$, adică

$$sgn\,[f^{(n)}(a)+\alpha(x)]=sgn\,f^{(n)}(a),\ \forall x\in V(a)\cap I,$$

încît din (2.40) deducem :

1^0. Dacă n e par, $\frac{(x-a)^n}{n!}\geqslant 0$, $\forall x\in V(a)$ şi

a) $f(x)-f(a)\geqslant 0$, $\forall x\in V(a)\cap I$ dacă $f^{(n)}(a)>0$, iar a e punct de minim.

b) $f(x)-f(a)\leqslant 0$, $\forall x\in V(a)\cap I$ dacă $f^{(n)}(a)<0$, iar a e punct de maxim.

2^0. Dacă n e impar şi a e interior lui I, cum $f^{(n)}(a)+\alpha(x)$ păstrează semn constant şi $\frac{(x-a)^n}{n!}$ este negativ cînd $x<a$ şi pozitiv cînd $x>a$, rezultă că pentru $x\in V(a)\cap I$, $\forall V(a)$, $f(x)-f(a)$ nu păstrează semn constant şi a nu e punct de extrem.

În acest caz derivata $f''(x)=0$ îşi schimbă semnul în punctul a, deci graficul îşi schimbă concavitatea în punctul $A(a, f(a))$, care se va numi *punct de inflexiune al curbei* ; tangenta la curbă, paralelă cu axa ox, traversează curba, vezi fig. 2.3 *a*, *b*.

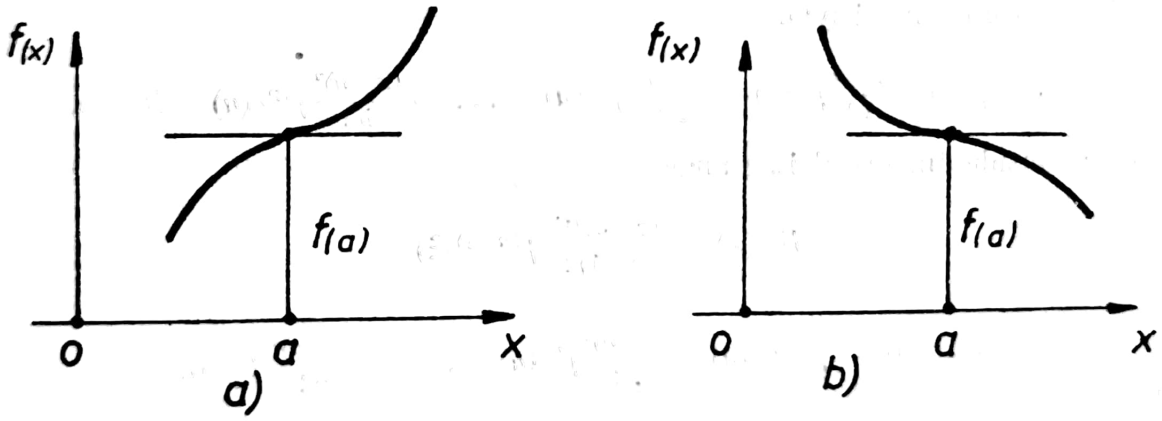


Fig. 2.3.

Exemplu. În cazul funcţiei

$$f(x)=x^3-3^2x+3x,$$

definită pe R, derivata

$$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$$

se anulează în punctul $x=1$, interior mulţimii de definiţie. Cum $f''(1)=0$, $f'''(1)\neq 0$, $n=3$ este impar, punctul $x=1$ nu e punct de extrem ; el e punct de

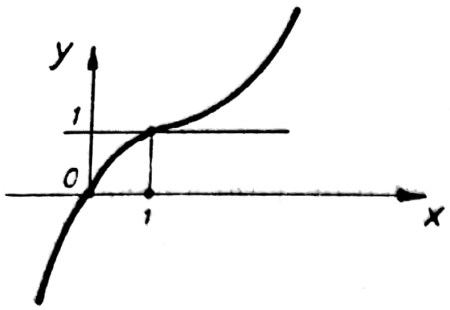


Fig. 2.4.

inflexiune (vezi fig. 2.4). Întrucît derivata funcției se anulează numai în punctul $x=1$ și domeniul de definiție R al funcției e format numai din puncte interioare, conform teoremei lui Fermat, funcția nu are nici un punct de extrem.

Dacă în exemplul considerat, definim funcția $f(x)$ pe mulțimea $E=[1, \infty)$, punctul $x=1$, care nu e interior mulțimii E, e punct de extrem — punct de minim (vezi fig. 2.4); de asemenea, dacă $E=(-\infty, 1]$ rezultă că $x=1$ e punct de extrem — punct de maxim.

2.6.3. SERIA TAYLOR. SERIA MAC-LAURIN

Funcției $f: I \to R$, indefinit derivabilă în $a \in I$, i se poate atașa seria de puteri

$$f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots, \tag{2.41}$$

numită *seria Taylor a funcției* $f(x)$, în *punctul* a.

Dacă în (2.41) luăm $a=0$, obținem

$$f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots,$$

seria Mac-Laurian a funcției $f(x)$.

Din formula lui Taylor

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x),$$

în care considerăm restul Lagrange

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \tag{2.42}$$

notînd

$$s_n(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a),$$

obținem

$$f(x)=s_n(x)+R_n(x)$$

și dacă $R_n(x)=f(x)-s_n(x)\to 0$ cînd $n\to\infty$, $\forall x\in X$, atunci seria (2.41) e convergentă pe X către funcția $f(x)$ și obținem

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+ \tag{2.41'}$$

$$+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots$$

formula de dezvoltare în serie Taylor a funcției $f(x)$ *în jurul punctului* a.

Scanned with OKEN Scanner

Teoremă. *Seria Taylor a funcției* $f: I \to R$ *în punctul* a *e convergentă către* f *într-o vecinătate* $V(a) \subset I$ *a punctului* a, *dacă derivatele de orice ordin* $f^{(n)}(x)$ *sînt mărginite pe* $V(a)$, *adică* $\forall x \in V(a)$ *și* $n \in N$, *există un număr* $M>0$ *astfel ca* $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$.

Cu ipotezele făcute, avînd în vedere expresia (2.42), rezultă

$$|R_n(x)| \leqslant M \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|, \qquad \forall x \in V(a). \tag{2.43}$$

Considerînd $x \in V(a)$ precizat, obținem seria cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} M \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|,$$

convergentă, întrucît

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x-a}{n+1} \right| = 0, \qquad \forall x \in V(a).$$

Rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} M \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = 0, \quad \forall x \in V(a),$$

astfel că, din (2.43) deducem că

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad \forall x \in V(a)$$

și seria Taylor e convergentă către $f(x)$ pe mulțimea $V(a)$.

Dacă în considerațiile făcute luăm $a=0$, obținem

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots, \tag{2.41''}$$

formula de dezvoltare în serie Mac-Laurin a funcției $f(x)$.

Notînd $x-a=y$, seria Taylor (2.41) devine

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$$

și din proprietățile seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ în variabila y deducem proprietățile seriei Taylor (2.41) în variabila x, unde $x=a+y$. Deci:

1^0. Există un număr R — raza de convergență a seriei, cu proprietatea că seria Taylor e absolut convergentă pe intervalul $(a-R,\ a+R)$.

2^0. Seria e uniform convergentă pe orice interval $[a-r, a+r]$ unde $0<r<R$.

3^0. Suma seriei e o funcție continuă pe $(a-R,\ a+R)$, e indefinit derivabilă pe $(a-R,\ a+R)$ și derivata de ordinul n a ei este egală cu suma seriei derivatelor de ordinul n.

Raza de convergență se determină utilizînd teoremele 1—2 din § 2.5, în care $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Scanned with OKEN Scanner

I. Funcția $f(x)=e^x$ are derivate de orice ordin $f^{(n)}(x)=e^x$, $n\in N$, mărginite pe intervalul $(-\infty, \infty)$, încît se poate scrie egalitatea (2.41″) și obținem

$$(2.44)\qquad e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad \forall x\in(-\infty,\ \infty),$$

dezvoltarea funcției e^x în serie de puteri.

Dacă în (2.44) înlocuim pe x cu x^k, respectiv $-x^k$ unde $k\in N$, obținem seriile de puteri

$$(2.45)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{nk}}{n!}=e^{x^k},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{nk}}{n!}=e^{-x^k},\quad x\in(-\infty,\ \infty).$$

Înlocuind în (2.44) pe x cu $x\ln a$ $(a>0)$, obținem

$$(2.46)\qquad a^x=1+\frac{x\ln a}{2!}+\frac{(x\ln a)^2}{2!}+\ldots+\frac{(x\ln a)^n}{n!}+\ldots,\quad x\in(-\infty,\ \infty),$$

dezvoltarea în serie de puteri a funcției a^x.

II. Funcțiile $\sin x$ și $\cos x$ au derivate de orice ordin mărginite pe intervalul $(-\infty, \infty)$, deci seriile Taylor corespunzătoare într-un punct oarecare $x_0\in(-\infty, \infty)$ sînt convergente pe $(-\infty, \infty)$, respectiv către $\sin x$ și $\cos x$. Luînd $x_0=0$, obținem dezvoltările

$$(2.47)\qquad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

$$(2.48)\qquad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,$$

valabile pe întreaga axă reală.

Și în acest caz, înlocuind pe x cu x^k $(k\in N)$, din (2.47) și (2.48) obținem seriile de puteri

$$(2.49)\qquad \begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{(2n+1)k}}{(2n+1)!}=\sin x^k\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2nk}}{(2n)!}=\cos x^k.\end{cases}\qquad x\in(-\infty,\infty)$$

III. Funcția $f(x)=\ln(1+x)$, definită pe intervalul $(-1,\ 1)$, indefinit derivabilă pe acest interval, are derivatele

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},\quad n=1,\ 2,\ \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$, seria Mac-Laurin a funcției $f(x)$ este

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

și are raza de convergență

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}} = 1.$$

Pe intervalul de convergență $(-1, +1)$ seria are suma $f(x)=\ln(1+x)$, dacă restul R_n din formula lui Mac-Laurin tinde la zero cînd $n\to\infty$, $\forall x\in(-1, 1)$.

Luînd restul lui Cauchy (2.37''), obținem

$$R_n = \frac{x(x-\xi)^n}{n!}(-1)^n\frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}}.$$

Cum $\xi\in(0, x)$, $\xi=\theta x$, unde $0<\theta<1$,

$$R_n = (-1)^n\frac{x^{n+1}}{1+\theta x}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$$

și, avînd în vedere valorile lui $x\in(-1, +1)$ și ale lui $\theta\in(0, 1)$, constatăm că

$$-1 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1.$$

Într-adevăr, $1-\theta>0$ și $1+\theta x>0$ astfel că

$$\frac{1-\theta}{1+\theta x} > -1.$$

Raportul

$$\frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1,$$

dacă $1-\theta<1+\theta x$, deci dacă $x>-1$.

Rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{1+\theta x} = 0,$$

astfel că $R_n\to 0$ cînd $n\to\infty$, $\forall x\in(-1, 1)$ și obținem

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \quad \forall x\in(-1, 1), \tag{2.50}$$

formula de dezvoltare în serie Mac-Laurin a funcției $\ln(1+x)$.

Dacă în (2.50) înlocuim pe x cu $-x$ deducem

$$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots, \quad \forall x\in(-1, 1). \tag{2.50'}$$

Scanned with OKEN Scanner

Scăzînd (2.50) și (2.50′) termen cu termen, aflăm

$$(2.50'')\quad \ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right),\quad \forall x\in(-1,\,1).$$

Pentru $x=\frac{1}{2p+1}\Rightarrow\frac{1+x}{1-x}=\frac{p+1}{p}$ și din (2.50″) obținem

$$\ln(p+1)=\ln p+$$

$$+2\left(\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{3(2p+1)^3}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2p+1)^{2n+1}}+\ldots\right),$$

o formulă de recurență care ne dă posibilitatea să calculăm logaritmul unui număr, dacă cunoaștem logaritmul numărului precedent, formulă utilă în calculul logaritmilor neperieni, dat fiind convergența foarte rapidă a seriei din membrul drept.

Derivînd seria (2.50′) termen cu termen, obținem seria geometrică

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots=(-\ln(1-x))'=\frac{1}{1-x},\quad x\in(-1,\,1),$$

cu aceeași rază de convergență ca și seria inițială și cu suma egală cu derivata sumei seriei inițiale.

Înlocuind în (2.50) pe x cu x^k, respectiv cu $-x^k$, $k\in N$, obținem

$$\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{nk}}{n}=\ln(1+x^k)\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}-\dfrac{x^{nk}}{n}=\ln(1-x^k).\end{cases},\quad x\in(-1,\,1)$$

Seria (2.50) e convergentă pe intervalul $(-1,\,1)$, e divergentă în punctul $x=-1$ (se obține seria armonică) și convergentă în punctul $x=1$ (se obține seria armonică alternată).

Trecînd în (2.50) la limită pentru $x\to1$, $x<1$ (vezi proprietățile seriilor de puteri), obținem

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots,$$

suma seriei armonice alternată.

IV. Funcția binomială $f(x)=(1+x)^m$, $m\in R$, indefinit derivabilă, are derivatele

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},\qquad n=1,\,2,\,\ldots$$

Cum $f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$, seria Mac-Laurin a funcției $f(x)$ e *seria binomială*

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Ea are raza de convergenţă

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-m}{n+1}}=1$$

şi pe intervalul de convergenţă $(-1, 1)$ suma seriei va fi $(1+x)^m$, dacă restul R_n din formula lui Mac-Laurin tinde la zero cînd $n\to\infty$.

Restul Cauchy (2.37′′) este

$$R_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}{n!}x(x-\xi)^n(1+\xi)^{m-n-1}.$$

Cum $\xi\in(0, x)$, rezultă $\xi=\theta x$, $\theta\in(0, 1)$ şi

$$R_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}{n!}x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n(1+\theta x)^{m-1}.$$

Aplicînd criteriul raportului seriei cu termeni pozitivi $\sum V_n$, unde

$$V_n=\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}{n!}x^{n+1}\right|,$$

obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_{n+1}}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-m}{n+1}|x|=|x|<1,$$

astfel că seria e convergentă şi $V_n\to 0$ cînd $n\to\infty$. Cum $(1+\theta x)^{m-1}$ este mărginit, iar

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n=0,$$

(vezi exemplul III) rezultă că $R_n\to 0$ cînd $n\to\infty$, $\forall x\in(-1, 1)$ şi pentru $x\in(-1, 1)$ avem egalitatea

$$(2.51)\qquad (1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+$$

$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,$$

care reprezintă o *generalizare a formulei binomului lui Newton.*

Dacă în (2.51) înlocuim pe x cu $-x$ rezultă

$$(2.51')\qquad (1-x)^m=1-\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2-\ldots+$$

$$+(-1)^n\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots\quad,x\in(-1, 1).$$

Dînd lui m diferite valori, din (2.51) şi (2.51′) obţinem diferite serii de puteri şi sumele corespunzătoare.

Astfel, pentru $m=-1$ şi $m=-2$, din (2.51′) aflăm seria geometrică

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

şi derivata sa

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$$

Pentru $m=\frac{1}{2}$, din (2.51) obţinem dezvoltarea

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{4}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^3}{6}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^4}{8}+\ldots+$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\frac{x^n}{2n}+\ldots,$$

iar pentru $m=-\frac{1}{2}$, dezvoltarea

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\ldots+$$

$$+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}x^n+\ldots$$

De asemenea, înlocuind pe x cu x^k, αx etc. din (2.51) şi (2.51′) se obţin noi serii de puteri şi sumele lor.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

3. FUNCŢII DE MAI MULTE VARIABILE

3.1. NOŢIUNI DE TEORIA MULŢIMILOR

3.1.1. DEFINIŢII

Noţiunea de mulţime e o noţiune primară — ea nu poate fi definită cu ajutorul unor noţiuni mai simple. Putem însă da numeroase exemple de mulţimi: mulţimea cărţilor dintr-o bibliotecă, mulţimea studenţilor dintr-un an de studiu, mulţimea literelor alfabetului latin etc.

Observăm deci că mulţimile sînt colecţii de obiecte care au proprietăţi comune.

Obiectele care alcătuiesc mulţimea se numesc *elementele mulţimii*. Ele pot fi de natură oricît de diferită: lucruri, fiinţe sau abstracţiuni ale minţii omului.

Mulţimile se notează cu litere mari ale alfabetului latin: A, B, C, ..., X, Y, ..., iar elementele lor cu litere mici: a, b, c, ..., x, y, ...

O mulţime poate fi precizată în două moduri:

1) enumerînd elementele ei, punîndu-le între două acolade. De exemplu, mulţimea A formată din numerele 1, 3, 5, 7, 9 se notează

$$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

2) arătînd proprietatea specifică elementelor sale. Astfel, mulţimea A se precizează arătînd că este formată din numerele impare mai mici ca 10 şi se notează

$$A=\{x \mid x- \text{ număr impar mai mic ca } 10\}.$$

Elementul x al mulţimii, care se poate identifica cu orice element din mulţime, se numeşte *element generic al mulţimii*.

Dacă a e un element al mulțimii A, scriem $a \in A$ sau $A \ni a$ și citim : *a aparține lui A*, respectiv *A conține pe a.*

Dacă a nu e element al mulțimii A, scriem $a \notin A$ sau $A \not\ni a$ și citim : *a nu aparține lui A*, respectiv *A nu conține pe a.*

Simbolurile $\in$, $\ni$ se numesc *simboluri de apartenență.*

Două mulțimi A și B sînt egale (notăm $A = B$) dacă ele sînt formate cu aceleași elemente. Deci $A = B$, dacă din $x \in A \Rightarrow x \in B$ și din $x \in B \Rightarrow x \in A$.

Considerăm o mulțime E și o proprietate P. Mulțimea

$$A = \{x | x \in E,\ x \text{ are proprietatea } P\}.$$

a tuturor elementelor x ale mulțimii E care au proprietatea P, se numește *parte a mulțimii E.*

Dacă toate elementele mulțimii E au proprietatea P, rezultă $A = E$ — *mulțimea însăși este o parte a sa.*

Dacă nici un element al mulțimii E nu are proprietatea P, mulțimea A nu are nici un element, se numește *mulțime vidă* și se notează $\varnothing$. Rezultă că mulțimea vidă este o parte a oricărei mulțimi.

Mulțimea care are ca elemente părțile mulțimii E se numește *mulțimea părților lui E* și se notează $P(E)$.

Se poate scrie $\varnothing \in P(E)$, $E \in P(E)$ și dacă $x \in E$ mulțimea $\{x\} \in P(E)$.

Fie A și E două mulțimi.

Dacă orice element al mulțimii A e element și al mulțimii E, spunem că mulțimea A *e submulțime a mulțimii E* și notăm $A \subset E$ sau $E \supset A$; citim : *A inclus în E*, respectiv *E include pe A.*

Simbolurile $\subset$, $\supset$ se numesc *simboluri de incluziune.*

Evident că $E \subset E$; facem convenția $\varnothing \subset E$. Mulțimile $\varnothing$ și E se numesc *submulțimi improprii* ale mulțimii E. Părțile mulțimii E sînt submulțimi ale mulțimii E.

Dacă există cel puțin un element a astfel ca $a \in A$ și $a \notin E$, mulțimea A nu este submulțime a mulțimii E și se notează $A \not\subset E$ sau $E \not\supset A$; citim : *A nu e inclusă în E*, respectiv *E nu include pe A.*

Relația de incluziune a mulțimilor are proprietățile :

1) $A \subset A$ — proprietatea de reflexivitate,

2) $A \subset B$ și $B \subset A \Rightarrow A = B$ — proprietatea de antisimetrie,

3) dacă $A \subset B$ și $B \subset C \Rightarrow A \subset C$ — proprietatea de tranzitivitate.

Proprietatea 2 este folosită pentru demonstrarea egalității a două mulțimi.

3.1.2. OPERAȚII CU MULȚIMI

Considerăm mulțimea E și A, B, C părți ale ei.

Reuniunea mulțimilor A și B e mulțimea $A \cup B$ (citim A reunit cu B), ale cărei elemente sînt elemente din A sau din B. Deci

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

Astfel

$$\{0, 1, 3\} \cup \{1, 2, 3, 5\} = \{0, 1, 2, 3, 5\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

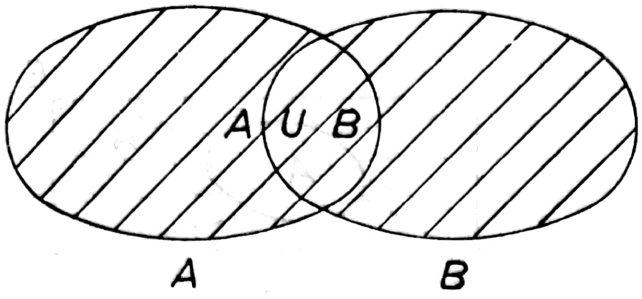


Fig. 3.1.

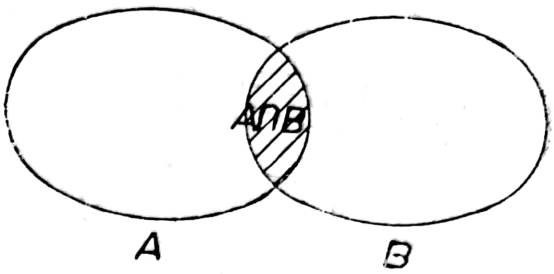


Fig. 3.2.

Observăm că făcînd reuniunea a două mulțimi, elementele comune se iau o singură dată.

Imaginea geometrică a reuniunii mulțimilor A și B e reprezentată prin punctele din suprafața haşurată (fig. 3.1).

Intersecția mulțimilor A și B este mulțimea $A \cap B$ (citim A intersectat cu B)

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ şi } x \in B\}$$

ale cărei elemente sînt elemente din A și din B.

Astfel

$$\{0, 1, 3\} \cap \{1, 2, 3, 5\} = \{1, 3\}.$$

Dacă $A \cap B = \varnothing$, A și B se numesc *mulțimi disjuncte*.

Imaginea geometrică a intersecției mulțimilor A și B este reprezentată prin punctele din suprafața haşurată (fig. 3.2).

Proprietăți ale operațiilor de reuniune și intersecție :

1) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ — proprietatea de idempotență a reuniunii și intersecției.

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ — proprietatea de asociativitate a reuniunii și a intersecției.

3) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ — proprietatea de comutativitate a reuniunii și a intersecției.

4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ — proprietatea de distributivitate a reuniunii față de intersecție, respectiv a intersecției față de reuniune.

5) $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Legătura dintre relația de incluziune și operațiile de reuniune și intersecție :

1) $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$, $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$.

2) Dacă $A \subset B \Rightarrow$ a) $A \cup B = B$, $A \cap B = A$,
b) $A \cup C \subset B \cup C$, $A \cap C \subset B \cap C$.

3) Dacă $A \subset C$ și $B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$.

4) Dacă $C \subset A$ și $C \subset B \Rightarrow C \subset A \cap B$.

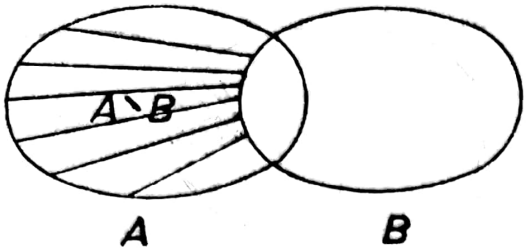


Fig. 3.3.

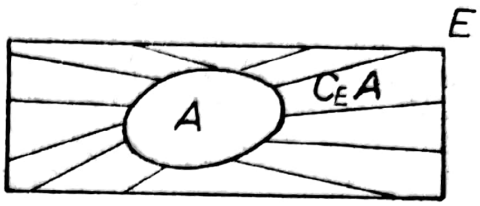


Fig. 3.4.

Diferența mulțimilor A și B e mulțimea $A \setminus B$ (citim A minus B)

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ și } x \notin B\},$$

ale cărei elemente sînt elemente din A, dar nu sînt elemente din B.

Astfel

$$\{1, 2, 3, 5\} \setminus \{0, 1, 3\} = \{2, 5\}.$$

Imaginea geometrică a diferenței mulțimilor A și B e reprezentată prin punctele din suprafața haşurată (fig. 3.3).

Dacă

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \setminus B = A, \quad B \setminus A = B.$$

Dacă

$$A \subset B \Rightarrow A \setminus B = \varnothing.$$

Complementara mulțimii A prin raport cu E ($A \subset E$), e mulțimea

$$C_E A = E \setminus A = \{x | x \in E \text{ și } x \notin A\}.$$

Cînd mulțimea E se subînțelege, sau nu e necesar a se preciza, complementara se poate nota simplu CA.

Imaginea geometrică a complementarei mulțimii A e reprezentată prin punctele din suprafața haşurată (fig. 3.4).

Proprietăți :

1) $CE = \varnothing$.
2) $C(CA) = A$
3) $A \cup CA = E$, $A \cap CA = \varnothing$
4) $C(A \cup B) = (CA) \cap (CB)$, $C(A \cap B) = (CA) \cup (CB)$ (relațiile lui De Morgan).

3.1.3. SPAȚIUL EUCLIDIAN n-DIMENSIONAL

Numim produs cartezian al mulțimilor E_1 și E_2 mulțimea

$$E_1 \times E_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}.$$

Dacă $E_1 \neq E_2 \Rightarrow E_1 \times E_2 \neq E_2 \times E_1$, deci ordinea de așezare a elementelor în perechi nu e indiferentă.

Produsul cartezian al mulțimilor $E_1, E_2, \ldots, E_n$ e mulțimea

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in E_i, i = 1 \div n\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $E_1=E_2=\ldots=E_n=E$

$$E_1\times E_2\times\ldots\times E_n=E^n=\{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)|x_i\in E,\ i=1\div n\ \}.$$

Dacă $E=R=(-\infty,\ \infty)$ obținem mulțimea

$$E^n=R^n=\{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\,|\,x_i\in R,\ i=1\div n\}.$$

numită *spațiul n-dimensional.*

Un element $X=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\in R^n$ se numește *punct al spațiului* R^n, iar numerele x_i $(i=1\div n)$ — *coordonatele punctului* (x_i — coordonata i).

Un punct $X=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\in R^n$ poate fi considerat ca *vector n-dimensional.*

În R^n se definesc suma a doi vectori și produsul vectorilor cu un scalar și spațiul R^n în care s-au definit aceste operații se numește *spațiu vectorial* vezi (§1.3).

Considerînd și vectorul $Y=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$, s-a definit suma vectorilor X și Y ca fiind vectorul

$$X+Y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \ldots,\ x_n+y_n),$$

iar *produsul vectorului* X *cu scalarul* α ca fiind vectorul

$$\alpha X=(\alpha x_1,\alpha x_2,\ \ldots,\ \alpha x_n).$$

Luînd $\alpha=-1$, obținem vectorul

$$(-1)\,X=-X=(-x_1,\ -x_2,\ \ldots,\ -x_n),$$

opusul vectorului X.

Vectorul $X+(-Y)$ se notează

$$X-Y=(x_1-y_1,\ x_2-y_2,\ \ldots,\ x_n-y_n)$$

și se numește *diferența vectorilor* X și Y.

În spațiul R^n s-a definit și operația *produs scalar* a doi vectori X și Y ca fiind scalarul

$$X\cdot Y=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i.$$

Cu această operație s-a definit în §1.3 norma vectorului X

$$\|X\|=\sqrt{X\cdot X}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

și distanța $d\,(X,\ Y)$ dintre punctele X și Y

$$d\,(X,\ Y)=\|X-Y\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}. \tag{3.1}$$

Expresia (3.1) s-a numit *metrică euclidiană*, iar spațiul vectorial R^n, în care distanța dintre două puncte este astfel definită, *spațiu euclidian n-dimensional.*

Scanned with OKEN Scanner

Din (3.1) regăsim formulele de calcul ale distanței dintre două puncte de pe dreaptă, din plan, din spațiu (din spațiile R, R^2, R^3):

$$d(X, Y)=|x_1-y_1|, \quad d(X, Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2},$$

$$d(X, Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}.$$

3.1.4. MULȚIMI CONVEXE ÎN R^n

Spunem că mulțimea C de puncte (vectori) din R^n e o mulțime convexă, dacă oricare ar fi X_1 și X_2 din C și $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, vectorul

$$X=(1-\lambda)\, X_1+\lambda X_2,$$

aparține mulțimii C. Deci, odată fixate oricare două puncte X_1 și X_2 din C, dînd lui λ toate valorile de pe segmentul $[0, 1]$ obținem punctele X, care fac parte de asemenea din C; pentru $\lambda=0$ se obține punctul X_1, pentru $\lambda=1$ se obține punctul X_2, pentru valori $0<\lambda<1$ se obțin puncte interioare segmentului X_1X_2, iar

$$X=(1-\lambda)\, X_1+\lambda X_2, \qquad \lambda\in[0, 1]$$

reprezintă ecuația (vectorială) a segmentului X_1X_2. Astfel, în cazul spațiului R^3, considerînd $X_1=(x_1^1, x_2^1, x_3^1)$, $X_2=(x_1^2, x_2^2, x_3^2)$, proiectăm pe axele de coordonate ecuația vectorială a segmentului X_1X_2 și obținem coordonatele x_1, x_2, x_3 ale punctului curent al segmentului

$$\begin{cases} x_1=(1-\lambda)\, x_1^1+\lambda x_1^2 \\ x_2=(1-\lambda)\, x_2^1+\lambda x_2^2 \\ x_3=(1-\lambda)\, x_3^1+\lambda x_3^2 \end{cases} \qquad \lambda\in[0, 1],$$

deci ecuațiile parametrice ale acestuia.

Cu cele arătate, putem defini o mulțime convexă ca fiind acea mulțime care se bucură de proprietatea că oricare ar fi două puncte ale sale, segmentul care le unește este inclus în mulțime.

În figura 3.5 *a*, respectiv 3.5 *b*, prezentăm cîte două mulțimi convexe, respectiv neconvexe.

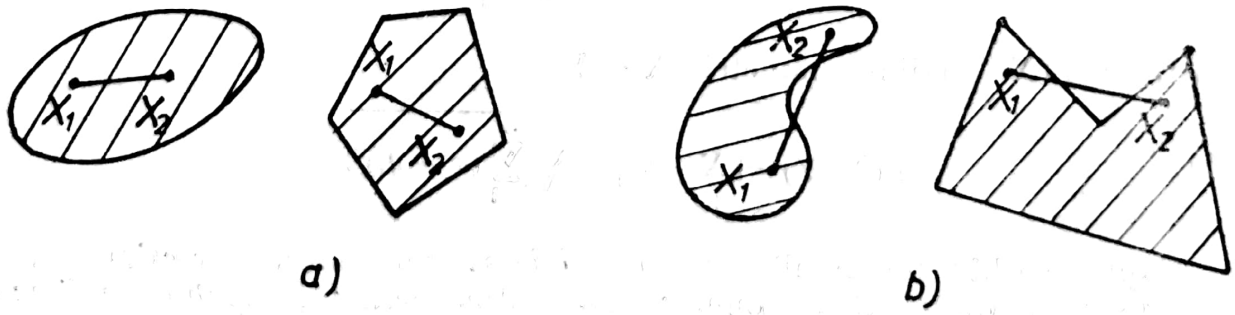


Fig. 3.5.

Scanned with OKEN Scanner

Un exemplu de mulțime convexă în R^n este mulțimea soluțiilor unui sistem (compatibil) de m ecuații cu n necunoscuți ($m<n$).

Într-adevăr, considerînd vectorul $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ format cu cele n necunoscute ale sistemului, sistemul se scrie sub forma matriceală

$$AX^T=B,$$

unde X^T este transpusul vectorului X (un vector coloană), A matricea sistemului (de dimensiuni $m\times n$), iar B matricea termenilor liberi (matrice coloană).

Notăm cu C mulțimea soluțiilor sistemului și fie $X_1\in C$, $X_2\in C$. Cum

$$AX_1^T=B, \quad AX_2^T=B$$

deducem că

$$AX_1^T=AX_2^T$$

și dacă $X=(1-\lambda)\,X_1+\lambda X_2$

$$AX^T=A\,[(1-\lambda)\,X_1^T+\lambda X_2^T]=AX_1^T+\lambda\,(AX_2^T-AX_1^T)=AX_1^T=B.$$

Rezultă că $X=(1-\lambda)\,X_1+\lambda X_2$ e soluție a sistemului oricare ar fi $\lambda\in[0, 1]$ și mulțimea C e convexă.

3.1.5. VECINĂTĂȚI. CLASIFICAREA PUNCTELOR MULȚIMILOR DIN R^n

În spațiul R^n definim *sfera (deschisă) cu centrul în X_0 și rază r* ca fiind mulțimea

$$V_r\,(X_0)=\{X\in R^n \mid d\,(X, X_0)<r\}.$$

În spațiile R, R^2, R^3 mulțimea $V_r\,(X_0)$ se reprezintă respectiv printr-un interval simetric (față de X_0), interiorul unui cerc, a unei sfere cu centrul în X_0 și rază r (vezi fig. 3.6).

Numim *interval n-dimensional* produsul cartezian

$$I^n=I_1\times I_2\times\ldots\times I_n=\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_k\in I_k,\ k=1\div n\},$$

al intervalelor $I_k=(a_k, b_k)$, $k=1\div n$.

Spunem că mulțimea $V\subset R^n$ e o *vecinătate a punctului* $X_0\in R^n$, dacă există un interval n-dimensional I^n, care conține pe X_0, inclus în mulțimea V, adică $X_0\in I^n\subset V$.

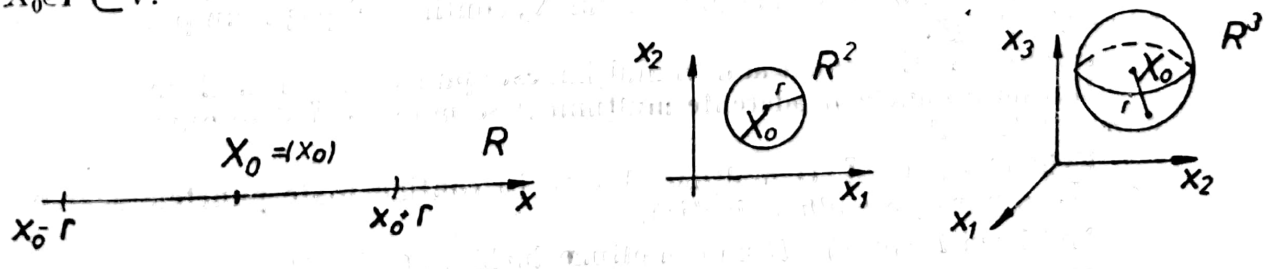


Fig. 3.6.

Rezultă că :

a) orice interval n-dimensional care-l conține pe X_0, e o vecinătate a lui X_0,

b) sfera cu centrul în X_0 și rază r e o vecinătate a lui X_0,

c) pe dreaptă, orice interval (a, b) care-l conține pe X_0, e o vecinătate a lui X_0.

Intervalul $(X_0-r, X_0+r) \subset R$ se numește *vecinătate simetrică* a punctului X_0.

Dacă $X_0 \in (a, b)$, (a, b) e o vecinătate a lui X_0 — ea conține o vecinătate simetrică al lui X_0, $(X_0-\alpha, X_0+\alpha)$, unde $\alpha = min\ \{X_0-a, b-X_0\}$ (vezi fig. 3.7).

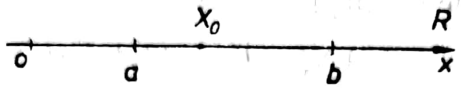


Fig. 3.7.

Considerăm mulțimea $A \subset R^n$.

Spunem că $X_0 \in R^n$ e *punct interior mulțimii* A dacă există o vecinătate V a lui X_0 inclusă în mulțimea A, adică dacă

$$X_0 \in V \subset A.$$

Mulțimea punctelor interioare unei mulțimi A se notează $\mathring{A}$ și se numește *interiorul mulțimii* A. Evident că $\mathring{A} \subset A$.

O mulțime A care conține numai puncte interioare ($\mathring{A}=A$) se numește *mulțime deschisă*.

De exemplu, $I=(a, b) \subset R$ e mulțime deschisă ($\mathring{I}=(a, b)$).

Mulțimea $I_1=[a, b] \subset R$ nu e mulțime deschisă ($\mathring{I}_1=(a, b)$).

Intervalul bidimensional

$$I^2=I_1 \times I_2=\{(x_1, x_2) | a_1<x_1<b_1,\ a_2<x_2<b_2\}$$

și sfera $V_r(X_0) \subset R^2$ sînt mulțimi deschise.

Spunem că punctul $X_0 \in R^n$ nu e interior mulțimii A, dacă nici o vecinătate a lui X_0 nu e inclusă în A.

Un punct care nu e interior unei mulțimi poate fi :

1) *punct exterior.* Spunem că punctul $X_0 \in R^n$ e exterior mulțimii A, dacă e interior complementarei mulțimii A, adică există o vecinătate V a lui X_0 astfel ca $X_0 \in V \subset CA$ $(V \cap A=\varnothing)$.

2) *punct aderent.* Spunem că punctul X_0 (nu neapărat din A) e punct aderent mulțimii A, dacă orice vecinătate V a lui X_0 conține cel puțin un punct din A, adică $V \cap A \neq \varnothing$.

Rezultă că orice punct al unei mulțimi este punct aderent mulțimii.

Mulțimea punctelor aderente mulțimii A se notează $\bar{A}$ și se numește *închiderea mulțimii* A.

Evident că $A \subset \bar{A}$. O mulțime A care își conține toate punctele aderente ($A=\bar{A}$) se numește *mulțime închisă*.

Mulțimea $I=[a, b) \subset R$ nu e mulțime închisă ($\bar{I}=[a, b] \neq I$).

Mulțimea $I_1=[a, b]$ e mulțime închisă ($\bar{I}_1=[a, b]=I_1$).

Scanned with OKEN Scanner

3) *punct frontieră.* Spunem că punctul X_0 e punct frontieră al mulțimii A, dacă e aderent mulțimii A și complementarei mulțimii A ($X_0 \in \bar{A} \cap \overline{CA}$).

Mulțimea punctelor frontieră ale mulțimii A se notează $F_r(A)$ și se numește *frontiera mulțimii* A ($F_r(A) = \bar{A} \cap \overline{CA}$).

4) *punct de acumulare.* Spunem că punctul X_0 (X_0 nu neapărat din A) e punct de acumulare al mulțimii A dacă orice vecinătate V a lui X_0 conține cel puțin un punct al mulțimii A, diferit de X_0, adică $V \cap A \setminus \{X_0\} \neq \emptyset$.

Observăm că dacă mulțimea A are un punct de acumulare X_0, în orice vecinătate V a lui X_0 se află o infinitate de puncte din mulțimea A.

Într-adevăr, luînd în vecinătatea V a lui X_0 un șir infinit de vecinătăți — sfere cu centrul în X_0 și raze din ce în ce mai mici, sfera i va conține un punct $X_i \in A$; sfera $i+1$ cu raza atît de mică încît să nu conțină punctul X_i, va conține un punct $X_{i+1} \in A$. Se obține astfel un șir infinit de puncte X_i din mulțimea A, $X_i \in V \subset A$, $i \in N$.

Deci, mulțimile care au puncte de acumulare sînt mulțimi infinite (cu o infinitate de elemente).

Constatăm de asemenea că orice punct de acumulare este punct aderent; reciproca nu e adevărată.

5) *punct izolat.* Spunem că punctul $X_0 \in A$ e punct izolat al mulțimii $A \subset R^n$, dacă există o vecinătate V a punctului X_0 astfel ca $V \cap A = \{X_0\}$.

Mulțimea $A = (2, 3] \cup \{5\} \subset R$ are un singur punct izolat, punctul $X_0 = 5$.

3.2. ASUPRA NOȚIUNII DE FUNCȚIE

Fie E și F două mulțimi distincte sau nu.

Dacă printr-un anumit procedeu, facem ca fiecărui element $x \in E$, să-i corespundă un element și numai unul, $y \in F$, spunem că am definit o funcție f pe mulțimea E cu valori în F, o notăm $f : E \to F$ și citim *funcția f definită pe E cu valori în F.*

Funcția se mai notează $E \xrightarrow{f} F$. Ea realizează o corespondență $x \xrightarrow{f} y$ de la mulțimea E la mulțimea F; y se numește *valoarea funcției f în punctul x*, sau *transformatul lui x prin funcția f*, sau *imaginea lui x prin f* și se notează $y = f(x)$, iar x — *variabila* sau *argumentul funcției f*, sau *proimaginea lui y*. Mulțimea E se numește *mulțimea de definiție* a funcției, iar F *mulțimea în care funcția ia valori.*

Prin funcție se înțelege deci, ansamblul format din mulțimea E, mulțimea F și corespondența $x \xrightarrow{f} y$ de la E la F.

Uneori, pentru simplitatea scrierii, cînd nu e necesar să se indice mulțimile E și F, ci numai corespondența $x \xrightarrow{f} y$ realizată de funcția f, funcția se notează indicîndu-se valoarea funcției $y = f(x)$, corespunzătoare argumentului x.

Spunem că funcția f e *injectivă* (*e o injecție*) dacă $f(x) = f(x')$ implică $x = x'$ (la puncte diferite corespund imagini diferite).

Scanned with OKEN Scanner

Spunem că funcția f e *surjectivă* (*e o surjecție*), dacă orice element $y \in F$ are cel puțin o proimagine $x \in E$.

Mulțimea

$$f(E) = \{y | y = f(x),\ x \in E\}$$

se numește *imaginea directă a lui E prin f* și reprezintă *mulțimea valorilor funcției*.

Funcția f e o surjecție, dacă și numai dacă $f(E) = F$; în acest caz spunem că f realizează o *aplicație a mulțimii E pe mulțimea F*.

Dacă funcția f e injectivă și surjectivă spunem că e *bijectivă* (*e o bijecție*). În acest caz ea realizează o corespondență biunivocă $x \leftrightarrows y$ între elementele mulțimilor E și F, adică fiecărui element $x \in E$ îi corespunde un singur element $y \in F$ (imaginea sa) și fiecărui element $y \in F$ îi corespunde un element x și numai unul (proimaginea sa).

O funcție f — bijectivă, admite inversă.

Numim *inversa funcției* $f : E \to F$ funcția $f^{-1} : F \to E$, care realizează corespondența $y \to x$, y și x fiind legate prin relația $y = f(x)$.

Astfel, inversa funcției bijective $f : E \to F$, care realizează corespondența

$$x \xrightarrow{f} y = x^3,$$

între mulțimile $E = [0, 2] \subset R$ și $F = [0, 8] \subset R$, e funcția $f^{-1} : F \to E$, care realizează corespondența

$$y \xrightarrow{f^{-1}} x = \sqrt[3]{y},$$

între mulțimile F și E.

Notînd și în cazul funcției f^{-1} argumentul cu x și valoarea funcției cu y, inversa funcției $y = f(x) = x^3$ e funcția $y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Fie funcțiile $f : E \to F$ și $g : F \to G$.

Prima realizează corespondența $x \xrightarrow{f} y = f(x)$ de la mulțimea E la mulțimea F, iar a doua, corespondența $y \xrightarrow{g} z = g(y)$ de la mulțimea F la mulțimea G. Putem considera o nouă funcție $h : E \to G$ care realizează corespondența $x \xrightarrow{h} z$, direct, de la mulțimea E la mulțimea G.

Funcția $h : E \to G$, care realizează corespondența $x \xrightarrow{h} z = g(f(x))$ se numește *compusa funcțiilor g și f*, se notează $h = g \circ f$ și se citește g compus cu f.

Exemplu. Compusa funcțiilor g și f, unde $f : E \to F$ realizează corespondența $x \xrightarrow{f} y = x^2$ între mulțimile $E = (-1, e)$ și $F = [e^{-1}, e^3]$, iar $g : F \to G$ realizează corespondența $y \xrightarrow{g} z = \ln y$ între mulțimile F și $G = [-5, +5)$, e funcția $h = g \circ f : E \to G$ care realizează corespondența $x \xrightarrow{h} z = \ln x^2$.

Se observă că h nu e nici surjectivă, nici injectivă.

Numim *graficul funcției* $f : E \to F$ mulțimea

$$G_f = \{(x, f(x)) | x \in E\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.3. FUNCȚII REALE DE n VARIABILE (DE O VARIABILĂ VECTORIALĂ)

Funcția $f: E \to F$, în care mulțimea de definiție e o submulțime a spațiului euclidian n-dimensional ($E \subset R^n$), iar mulțimea în care funcția ia valori, o submulțime a mulțimii numerelor reale ($F \subset R$) se numește *funcție reală de o variabilă vectorială*.

Funcția f realizează corespondența

$$X \xrightarrow{f} y = f(X),$$

în care $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ e un vector n-dimensional, iar y — valoarea funcției, un număr real.

Din corespondența

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \xrightarrow{f} y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

constatăm că valoarea funcției depinde de cele n coordonate $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale vectorului X, pe care le vom numi *variabile*, iar funcția f o vom numi *funcție de n-variabile*.

În cazul în care $E \subset R$, $X=(x)$, iar funcția $f: E \to F$ care realizează corespondența

$$x \xrightarrow{f} y = f(x)$$

e o funcție de o singură variabilă.

Se observă analogia ce există în scrierea funcțiilor de o variabilă și de mai multe variabile, fapt care fac posibile considerații legate de funcțiile de mai multe variabile, similare cu cele făcute la funcții de o singură variabilă.

Cînd nu e importantă precizarea mulțimilor E și F, ci numai corespondența

$$X \xrightarrow{f} y,$$

realizată de funcția f, pentru simplitatea scrierii aceasta se notează $y=f(X)$ sau $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Graficul funcției. $f: E \to F$, de n variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e mulțimea de puncte

$$G_f = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E\},$$

din spațiul $n+1$ — dimensional.

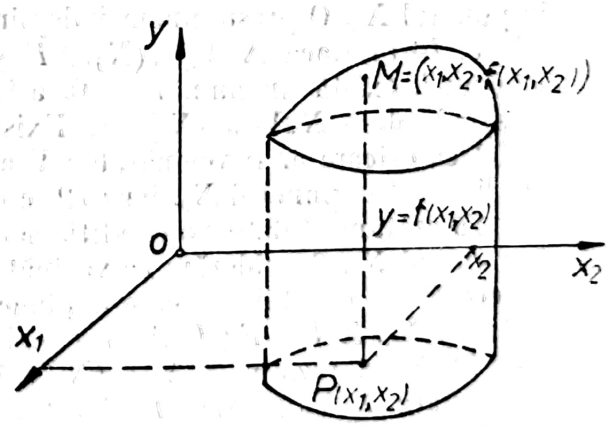


Fig. 3.8.

Astfel, în cazul unei funcții de două variabile, $y=f(x_1, x_2)$, (E fiind o suprafață în R^2), graficul este mulțimea de puncte

$$G_f = \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \mid (x_1, x_2) \in E\},$$

reprezentînd o suprafață G_f în spațiul tridimensional (vezi fig. 3.8).

Spunem că funcţia $f: E \to F$ e *mărginită inferior* pe mulţimea $A \subset E$, dacă există un număr real a astfel ca $a < f(X)$, $\forall X \in A$.

Spunem că funcţia $f: E \to F$ e *mărginită superior* pe mulţimea $A \subset E$, dacă există un număr real b astfel ca $f(X) < b$, $\forall X \in A$.

Spunem că funcţia $f: E \to F$ este *mărginită pe mulţimea* A, dacă e mărginită inferior şi superior pe această mulţime.

Deci funcţia $f: E \to F$ este mărginită pe $A \subset E$ dacă există un număr $M > 0$, astfel ca $|f(X)| < M$, $\forall X \in A$.

3.4. LIMITA UNEI FUNCŢII

Spunem că funcţia de n variabile $f: E \to F$ ($E \subset R^n$, $F \subset R$) are limita l în punctul de acumulare X_0 al mulţimii E, dacă pentru orice vecinătate V a lui l, există o vecinătate U a lui X_0, astfel ca $f(X) \in V$, oricare ar fi $X \in U \cap E$, $X \neq X_0$.

Teorema 1. *O condiţie necesară şi suficientă ca funcţia* $f: E \to F$ *să aibă limita* l *în punctul de acumulare* X_0 *al mulţimii* E *este ca pentru orice* $\varepsilon > 0$, *să existe un număr* $\eta(\varepsilon) > 0$, *astfel ca, oricare ar fi* $X \in E$, $X \neq X_0$

$$|f(X) - l| < \varepsilon \text{ dacă } ||X - X_0|| < \eta(\varepsilon). \tag{3.2}$$

Vom scrie

$$\lim_{X \to X_0} f(X) = l.$$

Să arătăm că, condiţia (3.2) e o condiţie suficientă ca funcţia să aibă limita l în punctul X_0. O presupunem îndeplinită şi rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, $f(X) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, dacă $X \in V_{\eta(\varepsilon)}(X_0) \cap E$ şi $X \neq X_0$. Dar, oricare ar fi vecinătatea V a lui l, există un număr $\varepsilon > 0$, astfel ca $(l-\varepsilon, l+\varepsilon) \subset V$ şi deci $f(X) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \subset V$, dacă $X \in V_{\eta(\varepsilon)}(X_0) \cap E$. Există deci vecinătatea $U = V_{\eta(\varepsilon)}(X_0)$ a lui X_0 astfel ca oricare ar fi vecinătatea V a lui l, $f(X) \in V$, dacă $X \in U \cap E$ şi funcţia f are limita l în punctul X_0, iar (3.2) e o condiţie suficientă.

Să arătăm că (3.2) e o condiţie necesară. Presupunem că funcţia f are limita l în punctul X_0. Considerăm ca vecinătate V a lui l intervalul $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$. Există o vecinătate U a lui X_0, care depinde de ε, astfel ca $f(X) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, oricare ar fi $X \neq X_0$, $X \in U \cap E$; U fiind o vecinătate a lui X_0, va conţine o sferă cu centrul în X_0 şi rază $\eta_{(\varepsilon)}$, $V_{\eta(\varepsilon)}(X_0) \subset U$. Rezultă că $|f(X) - l| < \varepsilon$ oricare ar fi $\varepsilon > 0$, dacă $X \in V_{\eta(\varepsilon)}(X_0) \cap E$, $X \neq X_0$, deci dacă $||X - X_0|| < \eta_{(\varepsilon)}$, $X \in E$, $X \neq X_0$ încît (3.2) e condiţie necesară.

Teorema 2. *O condiţie necesară şi suficientă ca funcţia* $f: E \to F$ *să aibă limita* l *în punctul de acumulare* $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *al mulţimii* E, *este ca pentru orice* $\varepsilon > 0$ *să existe un număr* $\eta_1(\varepsilon) > 0$, *astfel ca oricare ar fi* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$, $X \neq X_0$

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - l| < \varepsilon, \tag{3.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

dacă

$$|x_1-x_1^0|<\eta_1(\varepsilon)$$
$$|x_2-x_2^0|<\eta_1(\varepsilon)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$|x_n-x_n^0|<\eta_1(\varepsilon).$$

Vom scrie $\lim\limits_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0\\ \cdots\\ x_n\to x_n^0}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=l$ *şi vom spune că funcţia f are în punctul* $X_0=(x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0)$ *limită prin raport cu ansamblul variabilelor.*

Să arătăm că condiţia (3.3) e suficientă. O presupunem îndeplinită şi deducem că $\forall\varepsilon<0$, $f(X)\in(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, dacă $X\in I^n\cap E$, unde $I^n=I_1\times I_2\times\ldots\times I_n$, iar $I_k=(x_k^0-\eta_1(\varepsilon), x_k^0+\eta_1(\varepsilon))$, $k=1\div n$. În aceste condiţii, oricare ar fi vecinătatea V a lui l, există un număr $\varepsilon>0$ astfel ca $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)\subset V$ şi deci $f(X)\in V$, dacă $X\in I^n\cap E$, $X\neq X_0$ şi funcţia $f(x)$ are limita l în punctul X_0, (3.3) fiind o condiţie suficientă.

Să arătăm că, condiţia (3.3) e o condiţie necesară. Presupunînd că funcţia f are limita l în X_0, rezultă (vezi 3.2)

(3.4) $$|f(X)-l|<\varepsilon \text{ dacă } ||X-X_0||<\eta(\varepsilon).$$

Considerăm

$$|x_1-x_1^0|<\frac{\eta(\varepsilon)}{\sqrt{n}},\quad |x_2-x_2^0|<\frac{\eta(\varepsilon)}{\sqrt{n}},\ \ldots,\ |x_n-x_n^0|<\frac{\eta(\varepsilon)}{\sqrt{n}}.$$

şi avem $||X-X_0||<\eta(\varepsilon)$ încît, avînd în vedere (3.4), deducem că

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n)-l|<\varepsilon,$$

dacă

$$|x_1-x_1^0|<\frac{\eta(\varepsilon)}{\sqrt{n}}=\eta_1(\varepsilon)$$
$$|x_2-x_2^0|<\frac{\eta(\varepsilon)}{\sqrt{n}}=\eta_1(\varepsilon)$$
$$|x_n-x_n^0|<\frac{\eta(\varepsilon)}{\sqrt{n}}=\eta_1(\varepsilon),$$

astfel că condiţia (3.3) e o condiţie necesară.

Considerînd funcţia f de o singură variabilă $X=(x)$, teorema 2 se formulează astfel:

O condiţie necesară şi suficientă ca $f: E\to F$ $(E\subset R, F\subset R)$ să aibă limita l în punctul de acumulare x_0 al mulţimii E este ca pentru orice $\varepsilon>0$ să existe un număr $\eta(\varepsilon)>0$, astfel ca oricare ar fi $x\in E$, $x\neq x_0$

$$|f(x)-l|<\varepsilon, \text{ dacă } |x-x_0|<\eta(\varepsilon).$$

Scanned with OKEN Scanner

Regăsim un rezultat cunoscut din teoria funcțiilor de o singură variabilă.

Întrucît teoremele privitoare la limita funcțiilor de mai multe variabile au aceeași scriere formală ca și în cazul funcțiilor de o variabilă, o serie de proprietăți stabilite la limitele funcțiilor de o variabilă x se extind și funcțiilor de mai multe variabile înlocuindu-se valoarea absolută cu norma și punctul $x \in R$ cu punctul $X \in R^n$.

3.5. CONTINUITATEA FUNCȚIILOR

Spunem că funcția $f: E \to F$ e continuă în punctul $X_0 \in E$, dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(X_0)$, există o vecinătate U a lui X_0 astfel ca, oricare ar fi $x \in U \cap E$, să avem $f(X) \in V$.

Propoziție. *Orice funcție e continuă în punctele izolate ale domeniului ei de definiție.*

Într-adevăr, dacă X_0 este un punct izolat al mulțimii E, există o vecinătate U a lui X_0 astfel ca $U \cap E = X_0$. Deci, oricare ar fi vecinătatea V a lui $f(X_0)$, cînd $X \in U \cap E$, $f(X) = f(X_0) \in V$.

Printr-un raționament analog cu cel făcut în cazul limitei unei funcții (se înlocuiește peste tot l cu $f(X_0)$), se demonstrează teoremele :

Teorema 1. *O condiție necesară și suficientă ca funcția $f: E \to F$ să fie continuă în punctul $X_0 \in E$, este ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe un număr $\eta(\varepsilon) > 0$, astfel ca oricare ar fi $X \in E$*

$$|f(X) - f(X_0)| < \varepsilon, \text{ dacă } ||X - X_0|| < \eta(\varepsilon). \tag{3.5}$$

În cazul în care $X_0 \in E$ e punct de acumulare al mulțimii E, din teorema 1 deducem că, dacă funcția f e continuă în punctul X_0, ea are limită în X_0, egală cu $f(X_0)$.

Reciproca. *Dacă funcția f are limita $l = f(X_0)$, avem îndeplinite condițiile* (3.5) *și deci funcția e continuă în punctul X_0.*

Se poate deci formula următoarea :

Propoziție. *Condiția necesară și suficientă ca funcția f să fie continuă în punctul $X_0 \in E$, punct de acumulare ale mulțimii E, este ca ea să aibă limită în X_0, egală cu $f(X_0)$.*

Vom scrie

$$\lim_{X \to X_0} f(X) = f(X_0).$$

Teorema 2. *O condiție necesară și suficientă ca funcția $f: E \to F$ să fie continuă în punctul $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in E$ este ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe un număr $\eta(\varepsilon) > 0$, astfel ca oricare ar fi $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$*

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)| < \varepsilon, \tag{3.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

dacă

$$|x_1-x_1^0|<\eta(x)$$
$$|x_2-x_2^0|<\eta(\varepsilon)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$|x_n-x_n^0|<\eta(\varepsilon).$$

În cazul în care $X_0\in E$ este punct de acumulare al mulțimii E, conform cu condiția de continuitate (3.6), vom scrie

$$\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0\\ \cdots\\ x_n\to x_n^0}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0).$$

Dacă o funcție e continuă într-un punct, vom spune că ea e *continuă prin raport cu ansamblul variabilelor.*

Dacă f e o funcție de o singură variabilă $X=(x)$, teorema 2 se formulează astfel:

O condiție necesară și suficientă ca funcția de o singură variabilă $f: E\to F$ $(E, F\subset R)$ să fie continuă în punctul $x_0\in E$ este ca pentru orice $\varepsilon>0$ să existe un număr $\eta(\varepsilon)$, astfel ca oricare ar fi $x\in E$

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \text{ dacă } |x-x_0|<\eta(\varepsilon).$$

Regăsim un rezultat cunoscut din teoria funcțiilor de o singură variabilă.

Dată fiind funcția de n variabile $f: E\to F$ $(F\subset R^n, F\subset R)$ și un punct $X_0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)\in E$, considerăm funcțiile $f_i: E_i\to F$ $(i=1\div n)$ de o singură variabilă x_i, cu domeniul de definiție $E_i=\{x_i | x_i\in R, (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)\in E\}$, care realizează corespondența

$$x_i \xrightarrow{f_i} f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)=f_i(x_i).$$

Dacă funcția $y_i=f_i(x_i)=f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)$, de o singură variabilă x_i, numită *funcția parțială f_i a funcției f*, e continuă în punctul $x_i^0\in E_i$ spunem că funcția $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e *continuă în raport cu variabila x_i în punctul* $X_0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Propoziție. *Dacă funcția $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e continuă într-un punct $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ (în raport cu ansamblul variabilelor), atunci ea e continuă în acest punct în raport cu fiecare variabilă.*

Fie funcția f continuă în punctul $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ și funcția parțială $y_i=f_i(x_i)$, corespunzătoare acestui punct. Din teorema 2, luînd $x_1=x_1^0, x_2=x_2^0, \ldots, x_{i-1}=x_{i-1}^0, x_{i+1}=x_{i+1}^0, \ldots, x_n=x_n^0$ rezultă că

$$|f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)-f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)|<\varepsilon,$$
$$\forall\varepsilon>0 \text{ dacă } |x_i-x_i^0|<\eta\,\varepsilon),$$

deci

$$|f_i(x_i)-f_i(x_i^0)|<\varepsilon \quad \text{dacă} \quad |x_i-x_i^0|<\eta(\varepsilon)$$

și $f_i(x_i)$ e continuă în punctul x_i^0. Rezultă că $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e continuă în punctul $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ prin raport cu x_i.

Reciproca nu e adevărată: dacă funcția f e continuă într-un punct în raport cu fiecare variabilă, nu rezultă că ea e continuă în acest punct în raport cu ansamblul variabilelor.

Exemplu: Fie funcția de două variabile

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^3+3x^2y}, & (x, y)\in R^2\setminus\{(0, 0)\} \\ 0, & (x, y)=(0, 0), \end{cases}$$

definită pe mulțimea $E=R^2$ cu valori în $F=R$.

În punctul de acumulare $(0, 0)\in E$ construim funcțiile parțiale y_1 și y_2:

$$y_1=f_1(x)=f(x, 0)=0$$

$$y_2=f_2(y)=f(0, y)=0.$$

Întrucît $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(x, 0)=0=f(0, 0)$,

$\lim\limits_{y\to 0} f_2(y)=\lim\limits_{y\to 0} f(0, y)=0=f(0, 0)$,

funcția $f(x, y)$ e continuă în punctul $(0, 0)$ în raport cu fiecare variabilă; ea însă nu e continuă în raport cu ansamblul variabilelor.

Într-adevăr, calculînd

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=mx}} f(x, y)=\lim_{x\to 0}\frac{2m^2x^3}{(1+3m)x^3}=\frac{2m^2}{1+3m},$$

observăm că valorile $\dfrac{2m^2}{1+3m}$ ale funcției depind de panta m a dreptei pe care se află punctul $P=(x, y)=(x, mx)$ cînd tinde spre punctul $(0, 0)$, astfel că funcția nu are limită în punctul $(0, 0)$, deci nu e continuă în acest punct.

Modul în care s-a definit continuitatea funcțiilor de mai multe variabile face ca teoremele expuse privitoare la continuitate să aibă aceeași scriere formală ca și în cazul funcțiilor de o singură variabilă, astfel că proprietăți stabilite la limitele funcțiilor de o singură variabilă x se pot formula și pentru funcțiile de mai multe variabile, înlocuindu-se „valoarea absolută" cu „norma" și punctul $x\in R$ cu punctul $X\in R^n$.

Aplicație. Să se arate că funcția $f: E\to R$, unde $f=f(x, y)=\dfrac{x+2y-3}{x-y}$ și $E=R^2\setminus\{(x, y)|x=y\in R\}$ are în punct $X_0=(2, 1)$ limita $l=1$. Să se studieze continuitatea funcției pe domeniul de definiție.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Punctul X_0 e punct de acumulare al mulţimii E. Diferenţa

$$|f(X)-l|=\left|\frac{x+2y+3}{x-y}-1\right|=\left|\frac{3y-3}{x-y}\right|<\varepsilon,$$

dacă

$$-\varepsilon<\frac{3y-3}{x-y}<\varepsilon$$

sau

$$(3.7)\qquad \begin{cases} \dfrac{-\varepsilon x+(3+\varepsilon)y-3}{x-y}<0 \\ \dfrac{\varepsilon x+(3-\varepsilon)y-3}{x-y}>0. \end{cases}$$

Dreptele

$$(\Delta_1)\quad -\varepsilon x+(3+\varepsilon)y-3=0$$
$$(\Delta_2)\quad \varepsilon x+(3-\varepsilon)y-3=0$$
$$(\Delta_3)\quad x-y=0,$$

împart planul în regiuni (vezi fig. 3.9)

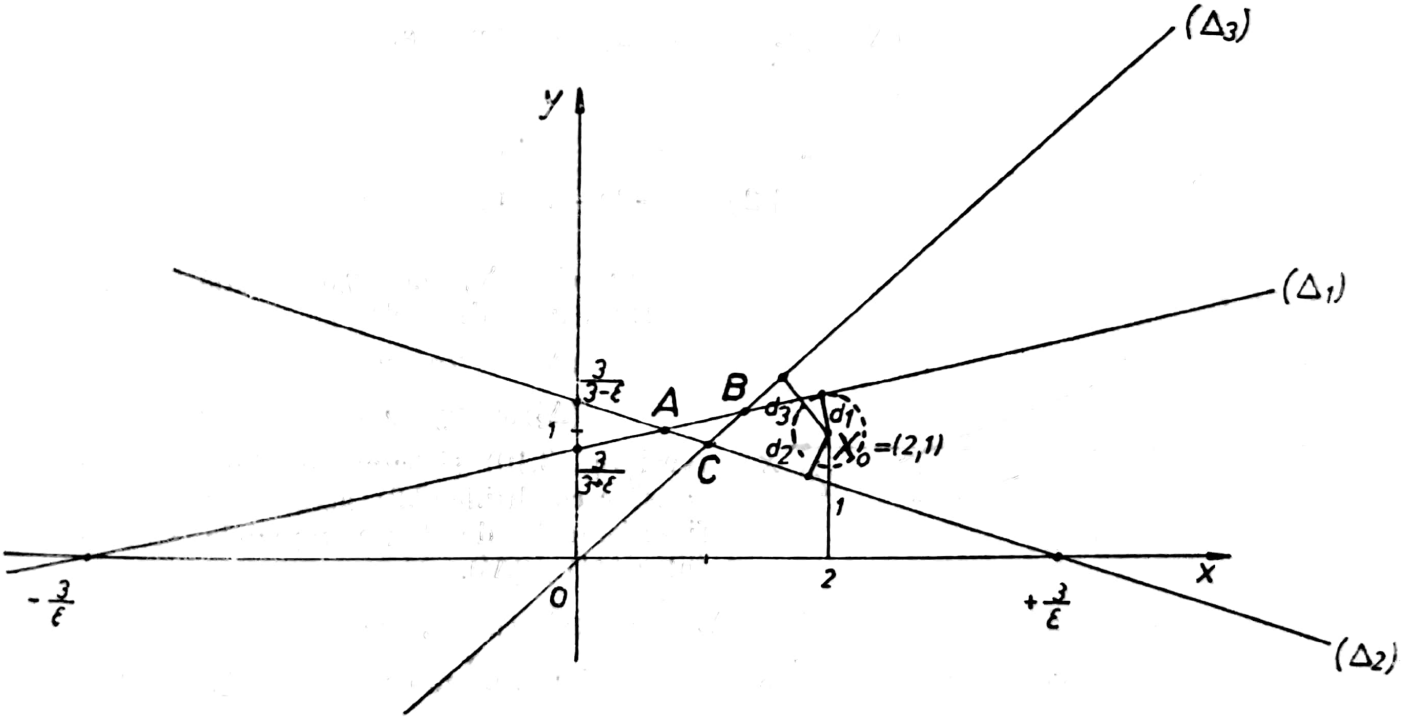


Fig. 3.9.

şi cum coordonatele punctului X_0 satisfac condiţiile (3.7), punctele unei întregi vecinătăţi vor satisface aceste inegalităţi. Într-adevăr, considerînd distanţele d_1, d_2, d_3 de la X_0, respectiv la dreptele (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3) :

$$d_1=\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+(3+\varepsilon)^2}},\quad d_2=\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+(3-\varepsilon)^2}},\quad d_3=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

cea mai mică distanță e

$$d_1=\frac{1}{\sqrt{1+\left(1+\frac{3}{\varepsilon}\right)^2}},$$

iar punctele sferei (cercului) cu centrul în X_0 și rază $\eta(\varepsilon)=d_1$ se află în regiunea din plan în care avem satisfăcute condițiile (3.7), astfel că

$$|f(X)-1|<\varepsilon \text{ dacă } \|X-X_0\|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+(3+\varepsilon)^2}}=\eta(\varepsilon),$$

și funcția are limita $l=1$ în X_0.

Cum $X_0\in E$ și $f(X_0)=1$, funcția e continuă în X_0.

Funcția $f(x, y)$ e continuă pe mulțimea E, fiind cît de funcții continue pe E, cu numitorul diferit de zero.

Într-adevăr, în cazul numărătorului $g(x, y)=x+2y-3$, oricare ar fi $X_0'=(x_0, y_0)\in E$

$$|g(X)-g(X_0')|=|x+2y-x_0-2y_0|<\varepsilon,$$

dacă

$$\text{(3.8)}\qquad \begin{cases} x+2y-x_0-2y_0-\varepsilon<0 \\ x+2y-x_0-2y_0+\varepsilon>0. \end{cases}$$

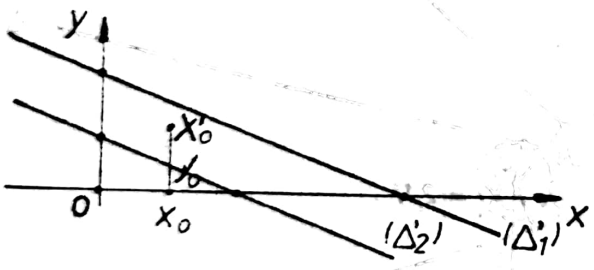


Fig. 3.10.

Punctul $X_0=(x_0, y_0)$ se află în zona cuprinsă între dreptele

$$(\Delta_1')\ x+2y-x_0-y_0-\varepsilon=0$$

$$(\Delta_2')\ x+2y-x_0-2y_0+\varepsilon=0,$$

(vezi fig. 3.10) și cum coordonatele sale satisfac condițiile (3.8), aceste condiții vor fi satisfăcute de toate punctele situate între (Δ_1') și (Δ_2').

Distanțele de la X_0' la (Δ_1') și (Δ_2') sînt egale cu $\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$, încît sfera (cercul) cu centrul în X_0' și raza $\eta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$ se află în interiorul zonei dintre (Δ_1') și (Δ_2'), astfel că

$$|g(X)-g(X_0')|<\varepsilon \text{ dacă } \|X-X_0'\|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}=\eta(\varepsilon)$$

și funcția e continuă în $X_0'\in E$, arbitrar, deci pe mulțimea E.

Analog se arată că numitorul $h(x)=x-y$ e o funcție continuă pe E.

Scanned with OKEN Scanner

3.6. DERIVATE PARȚIALE

Fie $f: E \to F$ o funcție de n variabile și $X_0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ un punct interior mulțimii E. Spunem că funcția f e derivabilă parțial în punctul X_0, în raport cu variabila x_i, dacă

$$\lim_{x_i \to x_i^0} \frac{f_i(x_i) - f_i(x_i^0)}{x_i - x_i^0} =$$

$$= \lim_{x_i \to x_i^0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)}{x_i - x_i^0}$$

există și este finită. Limita însăși se numește *derivata parțială a funcției f în raport cu x_i în punctul X_0* și se notează

$$f'_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0), \quad \frac{\partial f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_i}, \quad D_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0).$$

Exemplu. Derivata parțială în raport cu x a funcției $f(x, y)=\sin x^3y^2$, în punctul $X_0=(x_0, y_0)$ este

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x^3y_0^2 - \sin x_0^3y_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2 \sin \frac{(x^3-x_0^3)y_0^2}{2} \cos \frac{(x^3+x_0^3)y_0^2}{2}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[2 \cos \frac{(x^3+x_0^3)y_0^2}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x^3-x_0^3}{2} y_0^2}{\frac{x^3-x_0^3}{2} y_0^2} \cdot \frac{(x^2+x_0x+x_0^2)y_0^2}{2} \right].$$

Avînd în vedere că $\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$, rezultă că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin \frac{x^3-x_0^3}{2} y_0^2}{\frac{x^3-x_0^3}{2} y_0^2} = 1$$

și

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 3x_0^2y_0^2 \cos x_0^3y_0^2. \tag{3.9}$$

Analog se calculează

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{y \to y_0} \frac{\sin x_0^3y^2 - \sin x_0^3y_0^2}{y - y_0} = 2x_0^3y_0 \cos x_0^3y_0^2. \tag{3.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece derivata parțială în raport cu x_i, așa cum rezultă din definiție, implică menținerea constantă a celorlalte variabile efectuîndu-se derivata unei funcții de o singură variabilă (a unei funcții parțiale), rezultă că :

a) Pentru a calcula derivata parțială a unei funcții în raport cu o variabilă, aplicăm regulile de derivare ale funcțiilor de o variabilă considerînd constante celelalte variabile (vezi (3.9) și (3.10)).

b) Efectuînd operații algebrice cu funcții derivabile parțiale, obținem funcții derivabile parțial.

c) Dacă funcția $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e derivabilă parțial în raport cu x_i în punctul $X_0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, ea e continuă în raport cu x_i în punctul X_0 (funcția parțială $f_i=f_i(x_i)=f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)$ e continuă în punctul x_i^0, ca funcție de o singură variabilă x_i, derivabilă în x_i^0).

Dacă funcția $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e derivabilă parțial în raport cu fiecare variabilă x_i în punctul X_0, nu rezultă că e continuă în raport cu ansamblul variabilelor în acest punct. Astfel, în cazul funcției

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y)\in R^2\setminus\{(0, 0)\}\\ 0, & (x, y)=(0, 0),\end{cases}$$

cum $f(x, 0)=0$, $f(0, y)=0$ și $f(0, 0)=0$

$$f'_x(0, 0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x, 0)-f(0, 0)}{x}=0$$

$$f'_y(0, 0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0, y)-f(0, 0)}{y}=0,$$

și funcția are în origine derivate parțiale în raport cu fiecare variabilă ; ea, însă, nu e continuă (în raport cu ansamblul variabilelor) în acest punct, deoarece

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f(x,y)=\frac{m}{1+m^2}$$

e o valoare care depinde de m — panta dreptei pe care se deplasează spre origine punctul $X=(x, y)$. Funcția nu are limită în origine, deci nu e continuă.

d) Dacă funcția $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are derivate parțiale în raport cu fiecare variabilă x_i, continue (sau mărginite) într-o vecinătate V a punctului X_0, interior mulțimii de definiție, se demonstrează că funcția e continuă în X_0.

Astfel, în exemplul anterior, nu surprinde faptul că funcția f nu e continuă în origine, deoarece derivatele

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$f'_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$

nu sînt continue și nici mărginite în nici o vecinătate V a originii.

Vom spune că funcția f e derivabilă parțial în raport cu x_i pe mulțimea E, dacă e derivabilă în raport cu x_i în fiecare punct $X\in E$.

În acest caz se poate considera o nouă funcție — *derivata parțială a funcției f în raport cu x_i*

$$f'_{x_i}: E\to R,$$

care realizează corespondența

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)\xrightarrow{f'_{x_i}} f'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Dacă derivatele parțiale f'_{x_i} sînt derivabile pe mulțimea E, derivatele lor

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f'_{x_i})=f''_{x_ix_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}, \qquad (i, j=1\div n)$$

se numesc *derivate parțiale de ordinul doi ale funcției f, în raport cu x_i și x_j.*

În cazul funcțiilor de n variabile putem vorbi de n derivate parțiale de ordinul întîi și n^2 derivate parțiale de ordinul doi.

Astfel, funcția de două variabile $f(x, y)$ are 2^2 de rivate parțiale de ordinul doi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=(f'_x)'_x=f''_{x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=(f'_y)'_y=f''_{y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=(f'_x)'_y=f''_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=(f'_y)'_x=f''_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},$$

ultimele două derivate numindu-se *derivate mixte.*

Analog se definesc derivatele parțiale de ordinul $n>2$ ale funcției f

$$\frac{\partial^n f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i^{\alpha}\partial x_j^{\beta}\ldots\partial x_m^{\lambda}},$$

în raport cu x_m de λ ori $\ldots$ x_j de β ori, x_i de α ori.

Derivatele parțiale mixte f''_{xy} și f''_{yx}, ale funcției de două variabile $f(x, y)$, în general nu sînt egale. Condiții suficiente ca derivatele parțiale mixte să fie egale sînt exprimate de următoarea teoremă :

Scanned with OKEN Scanner

Teoremă (A. Schwartz). *Dacă funcția de două variabile $f: E \to F$ are derivate parțiale mixte de ordinul doi într-o vecinătate V a punctului $(x, y) \in E$ și dacă f''_{xy} e continuă în punctul (x, y), atunci*

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y).$$

Construim expresia

$$E = f(x+h,\ y+k) - f(x+h,\ y) - f(x,\ y+k) + f(x,\ y), \tag{3.11}$$

în care h și k sînt astfel aleși ca $(x+h,\ y+k) \in V$. Cu notația

$$\varphi(x) = f(x, y+k) - f(x,y), \tag{3.12}$$

expresia (3.11) este

$$E = \varphi(x+h) - \varphi(x). \tag{3.13}$$

Funcția $f(x,y)$ are derivate parțiale de ordinul doi în raport cu x în V. Rezultă că funcția $\varphi(x)$ e continuă și derivabilă pe $[x, x+h]$. Putem deci aplica expresiei (3.13) formula Lagrange, astfel că, avînd în vedere notația (3.12), obținem

$$E = h\varphi'(\xi) = h\,[f'_x(\xi,\ y+k) - f'_x(\xi,\ y)], \quad x < \xi < x+h. \tag{3.14}$$

Cum derivata f''_{xy} există în vecinătatea V și e continuă, parantezei mari a expresiei (3.14), considerată ca funcție de o singură variabilă y, îi putem aplica formula Lagrange și rezultă

$$E = hkf''_{xy}(\xi, \eta), \qquad \begin{cases} x < \xi < x+h \\ y < \eta < y+k. \end{cases} \tag{3.15}$$

În ipotezele teoremei, din (3.12) deducem

$$\lim_{k\to 0} \frac{\varphi(x)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,\ y+k) - f(x)}{k} = f'_y\ (x,\ y), \tag{3.16}$$

astfel că, avînd în vedere (3.13), aflăm

$$\lim_{k\to 0} \frac{E}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\varphi(x+h)}{k} - \lim_{k\to 0} \frac{\varphi(x)}{k} = f'_y(x+h,\ y) - f'_y(x,\ y). \tag{3.17}$$

Dar, din (3.15) deducem că

$$\lim_{k\to 0} \frac{E}{k} = \lim_{k\to 0} h f''_{xy}(\xi,\eta) = h f''_{xy}(\xi,y), \tag{3.18}$$

încît, comparînd expresiile (3.17) și (3.18), aflăm egalitatea

$$f''_{xy}(\xi,\ y) = \frac{f'_y(x+h,\ y) - f'_y(x,\ y)}{h},$$

din care, prin trecere la limită pentru $h \to 0$, obținem

$$f''_{xy}(x,\ y) = f''_{yx}\ (x,\ y).$$

Scanned with OKEN Scanner

În condițiile în care ipotezele din teorema lui Schwarz sînt îndeplinite, vom spune că în derivatele mixte se poate interverti ordinea de derivare.

Prin inducție matematică se arată că această proprietate este valabilă pentru derivatele mixte de orice ordin, dacă derivatele de ordinul respectiv sînt continue.

Astfel, în cazul derivatelor mixte de ordinul trei, aplicînd teorema lui Schwarz obținem

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$$

și

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2},$$

astfel că

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}.$$

În general

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^n \partial y^m} = \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^{n-1} \partial y^m \partial x} = \ldots = \frac{\partial^{m+n} f}{\partial y^m \partial x^n}.$$

Proprietatea se menține și în cazul funcțiilor de trei sau mai multe variabile.

Exemple. 1°. Funcția $f(x, y)=x^2y+xy^3-2y^2$ definită pe R^2 are derivate parțiale mixte de ordinul doi în R^2, iar $f''_{xy}=2x+3y^2$ e continuă, încît, calculînd f''_{yx} constatăm că

$$f''_{yx}=2x+3y^2=f''_{xy}, \quad \forall\, (x, y)\in R^2.$$

2°. În cazul funcției

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y-xy^3}{x^2+y^2}, & \text{dacă } x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x=y=0 \end{cases}$$

$$f'_x(0, y)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x, y)-f(0, y)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2y-y^3}{x^2+y^2}=-y$$

$$f'_y(x, 0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x, y)-f(x, 0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}=x$$

$$f'_x(0, 0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x, 0)-f(0, 0)}{x}=0,$$

$$f'_y(0, 0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0, y)-f(0, 0)}{y}=0,$$

iar

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1$$

$$f''_{yx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

Constatăm că $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$, rezultat ce nu surprinde întrucît derivata mixtă

$$f''_{xy}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}, & (x,y)\neq(0,0)\\ -1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

nu e continuă în origine.

Într-adevăr

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f''_{xy}(x,y)=\frac{1+9m^2-9m^4-m^6}{(1+m^2)^3}$$

e o valoare ce se modifică odată cu m — panta dreptei pe care se deplasează spre origine punctul $X=(x,y)$. Funcția neavînd limită în origine, nu e continuă în acest punct.

3.7. DIFERENȚIALA UNEI FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE

Considerăm funcția de două variabile $f: E\to F$ $(E\subset R^2, F\subset R)$. Presupunem că funcția f are derivate parțiale f'_x, f'_y într-o vecinătate V a punctului (x_0, y_0), continue în (x_0, y_0).

În aceste ipoteze putem aplica diferenței

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=[f(x,y)-f(x_0,y)]+[f(x_0,y)-f(x_0,y_0)]$$

formula lui Lagrange și obținem

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=(x-x_0)\,f'_x(\xi,y)+(y-y_0)\,f'_y(x_0,\eta),\quad \begin{cases}x_0<\xi<x.\\ y_0<\eta<y.\end{cases} \tag{3.19}$$

Cum funcțiile f'_x, f'_y sînt continue în punctul (x_0, y_0), rezultă că

$$f'_x(\xi,y)=f'_x(x_0,y_0)+[f'_x(\xi,y)-f'_x(x_0,y_0)]=f'_x(x_0,y_0)+\theta_1(x,y)$$

$$f'_x(x_0,\eta)=f'_y(x_0,y_0)+[f'_y(x_0,\eta)-f'_y(x_0,y_0)]=f'_y(x_0,y_0)+\theta_2(x,y),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\theta_1(x, y)\to 0$, $\theta_2(x, y)\to 0$ cînd $x\to x_0$ și $y\to y_0$, iar diferența (3.19) se poate scrie sub forma

$$(3.20)\qquad f(x, y)-f(x_0, y_0)=(x-x_0)\, f'_x(x_0, y_0)+(y-y_0)\, f'_y(x_0, y_0)+$$
$$+\theta_1(x, y)(x-x_0)+\theta_2(x, y)\,(y-y_0)$$

și funcția $f(x, y)$ se zice funcție diferențiabilă în punctul (x_0, y_0).

Dacă (x, y) este suficient de aproape de (x_0, y_0), se poate face aproximarea

$$f(x, y)-f(x_0, y_0)\approx(x-x_0)\, f'_x(x_0, y_0)+(y-y_0)\, f'_y(x_0, y_0),$$

iar funcția liniară în x și y, notată

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0)=(x-x_0)\, f'_x(x_0, y_0)+(y-y_0)\, f'_y(x_0, y_0),$$

care aproximează creșterea funcției $f(x, y)$ în vecinătatea punctului (x_0, y_0), se numește *diferențiala de ordinul întîi a funcției $f(x, y)$ în punctul (x_0, y_0)*.

Considerînd funcțiile $\varphi(x, y)=x$, $\psi(x, y)=y$, obținem

$$\varphi'_x(x, y)=1,\ \varphi'_y(x, y)=0\ ;\ \psi'_x(x, y)=0,\ \psi'_y(x, y)=1 \text{ si } \mathrm{d}\varphi(x_0, y_0)=\mathrm{d}x=x-x_0,$$
$$\mathrm{d}\psi\ (x_0, y_0)=\mathrm{d}y=y-y_0,$$

iar diferențiala funcției $f(x, y)$ în punctul (x_0, y_0) se scrie

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0)=\frac{\partial f(y_0, y_0)}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

Diferențiala funcției f în punctul $(x, y)\in E$ este

$$\mathrm{d}f(x, y)=\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y=\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)f(x, y),$$

o funcție liniară în X și Y ($\mathrm{d}x=X-x$, $\mathrm{d}y=Y-y$).

Operatorul

$$\mathrm{d}=\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{d}y,$$

cu care exprimăm diferențiala de ordinul întîi a funcției se numește *operatorul de diferențiere de ordinul întîi*.

Dacă funcția $f(X)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are derivatele parțiale de ordinul întîi într-o vecinătate V a punctului $X_0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, continue în X_0, funcția e diferențiabilă în X_0 și diferențiala sa (se introduce la fel ca în cazul funcției de două variabile) este

$$\mathrm{d}f(X_0)=\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_1}(x_1-x_1^0)+\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_2}(x_2-x_2^0)+\ldots+\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_n}(x_n-x_n^0).$$

Notînd $x_i-x_i^0=\mathrm{d}x_i$ ($i=1\div n$), diferențiala de ordinul întîi se poate exprima cu ajutorul operatorului de diferențiere

$$\mathrm{d}=\frac{\partial}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n$$

Scanned with OKEN Scanner

și este

$$df(X_0)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)f(X_0).$$

Diferențiala funcției $f(X)$ în punctul $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e funcția liniară în X_i

$$df(X)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)f(X),$$

în care $dx_i=X_i-x_i$, $i=1\div n$.

Dacă funcția $f(x, y)$ are derivatele parțiale de ordinul n într-o vecinătate V a punctului (x_0, y_0), continue în (x_0, y_0), *funcția e diferențiabilă de n ori* în acest punct și *diferențiala de ordinul n* a ei este

$$d^nf(x_0, y_0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right)^{(n)}f(x_0, y_0),$$

unde exponentul n semnifică „dezvoltarea formală" a parantezei cu formula binomului lui Newton, urmată de „înmulțirea formală" a expresiei cu $f(x_0, y_0)$.

Cu notația $x-x_0=dx$, $y-y_0=dy$, se introduce *operatorul de diferențiere de ordinul n*

$$d^n=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(n)},$$

cu care

$$d^nf(x_0, y_0)=\left(\frac{\partial}{\partial y}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(n)}f(x_0, y_0).$$

Diferențiala de ordinul n a funcției $f(x, y)$ în punctul $X=(x, y)$ este

$$d^nf(x, y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(n)}f(x, y), \quad \begin{cases} dx=X-x \\ dy=Y-y, \end{cases} \tag{3.21}$$

o funcție de gradul n în variabilele X și Y omogenă.

Într-adevăr, forma dezvoltată a expresiei (3.21) este

$$d^nf=\frac{\partial^nf}{\partial x^n}dx^n+C_n^1\frac{\partial^nf}{\partial y\,\partial x^{n-1}}dx^{n-1}dy+\ldots$$

$$\ldots+C_n^k\frac{\partial^nf}{\partial y^k\,\partial x^{n-k}}dx^{n-k}dy^k+\ldots+\frac{\partial^nf}{\partial y^n}dy^n. \tag{3.22}$$

Diferențiala de ordinul doi va fi deci

$$d^2f(x, y)=\frac{\partial^2f(x, y)}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2f(x, y)}{\partial y\,\partial x}dxdy+\frac{\partial^2f(x, y)}{\partial y^2}dy^2$$

și așa cum a fost definită, se obține prin diferențierea diferențialei de ordinul întîi, luînd $d(dx)=0$, $d(dy)=0$.

Într-adevăr

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f)=\mathrm{d}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right]=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x+\mathrm{d}(\mathrm{d}x)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}y+\mathrm{d}(\mathrm{d}y)=$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x^2+2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y^2=\mathrm{d}^2 f.$$

În general

$$\mathrm{d}^n f=\mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1}f).$$

Diferențiala de ordinul $k\geqslant 1$ a funcției $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, în punctul $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se definește analog:

$$\mathrm{d}^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n\right)^{(k)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

și se exprimă cu ajutorul operatorului de diferențiere

$$\mathrm{d}^k=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n\right)^{(k)},$$

în care exponentul k semnifică „ridicarea formală" a parantezei la puterea k.

3.8. DERIVATELE ȘI DIFERENȚIALELE FUNCȚIILOR COMPUSE

Teorema 1. *Dacă funcțiile $u(x)$ și $v(x)$ au derivate continue pe mulțimea $X\subset R$, iar funcția $f(u, v)$ are derivate parțiale continue pe $Y=\{(u, v)|u=u(x), v=v(x), x\in X\}$, atunci funcția compusă $F(x)=f(u(x), v(x))$ are derivată pe X egală cu*

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

Fie $x_0\in X$ și $u_0=u(x_0)$, $v_0=v(x_0)$. Cu ipotezele făcute

$$F(x)-F(x_0)=f(u, v)-f(u_0, v_0)=(u-u_0)\,f'_u(u_0, v_0)+(v-v_0)\,f'_v(u_0, v_0)+$$

$$+\theta_1(u,v)\,(u-u_0)+\theta_2(u, v)\,(v-v_0),$$

unde $\theta_1(u, v)\to 0$, $\theta_2(u, v)\to 0$ cînd $u\to u_0$, $v\to v_0$ (vezi (3.20)).
Deci

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f'_u(u_0, v_0)\,\frac{u-u_0}{x-x_0}+f'_v(u_0, v_0)\,\frac{v-v_0}{x-x_0}+ \tag{3.23}$$

$$+\frac{u-u_0}{x-x_0}\,\theta_1(u, v)+\frac{v-v_0}{x-x_0}\,\theta_2(u, v)$$

şi cum

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u-u_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}=u'(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{v-v_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}=v'(x_0),$$

trecînd în (3.23) la limită pentru $x\to x_0$ obţinem

$$F'(x_0)=f'_u(u_0, v_0)\ u'(x_0)+f'_v(u_0, v_0)\ v'(x_0).$$

Punctul $x_0\in X$ fiind arbitrar, rezultă că derivata funcţiei compuse $F(x)$ în punctul $x\in X$ este

$$F'(x)=\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial f(u, v)}{\partial v}\frac{dv}{dx} \tag{3.24}$$

o funcţie continuă, fiind exprimată prin operaţii cu funcţii continue.

Teorema 1 e valabilă şi în cazul a n funcţii $u_i(x)$, $i=1\div n$. Analog se deduce că dacă funcţia compusă $F(x)=f(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$ satisface condiţiile similare din teorema 1, ea are derivată — funcţia continuă

$$F'(x)=\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx}+\frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{du_2}{dx}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{du_n}{dx}. \tag{3.25}$$

Funcţia $F(x)$ este deci diferenţiabilă şi diferenţiala sa este

$$dF(x)=F'(x)\,dx=\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx}dx+\frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{du_2}{dx}dx+\ldots+\frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{du_n}{dx}dx.$$

Cum $\frac{du_k}{dx}\cdot dx=du_k$, $k=1\div n$, rezultă

$$dF(x)=\frac{\partial f}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial f}{\partial u_2}du_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial u_n}du_n. \tag{3.26}$$

Astfel, în cazul funcţiei $F(x)=f(u(x), v(x))$

$$dF(x)=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv. \tag{3.27}$$

Exemplu. Pentru a calcula derivata funcţiei

$$F(x)=(1+\cos^2 x)^{\ln(1+\sin^2 x)},$$

notăm $u=u(x)=1+\cos^2 x$, $v=v(x)=1+\sin^2 x$ şi

$$F(x)=u^{\ln v}=f(u(x), v(x)),$$

astfel că, aplicînd (3.24), obţinem

$$F'(x)=\ln v\,u^{\ln v-1}\frac{du}{dx}+u^{\ln v}\ln u\,\frac{1}{v}\,\frac{dv}{dx}=u^{\ln v}\left(\frac{\ln v}{u}\,\frac{du}{dx}+\frac{\ln u}{v}\,\frac{dv}{dx}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $\frac{du}{dx} = -\sin 2x$, $\frac{dv}{dx} = \sin 2x$, făcînd înlocuirile rezultă

$$F'(x) = (1+\cos^2 x)^{\ln(1+\sin^2 x)} \sin 2x \ln \frac{(1+\cos^2 x)^{\frac{1}{1+\sin^2 x}}}{(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{1+\cos^2 x}}}.$$

Dacă $f(u, v)$, considerată în teorema 1, are derivate parțiale de ordinul doi continue pe Y, iar funcțiile $u(x)$, $v(x)$ au derivate de ordinul doi continue pe X, se poate aplica teorema 1 funcției $F'(x)$ dată de (3.24) și folosind regulile de derivare obținem

$$F''(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{dv}{dx}\right)\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{dv}{dx}\right)\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{d^2v}{dx^2}.$$

Avînd în vedere că $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$ (teorema lui Schwarz), derivata de ordinul doi a funcției $F(x)$ este

$$F''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \tag{3.28}$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{d^2v}{dx^2}\right)$$

o funcție continuă, fiind exprimată prin operații cu funcții continue. Se poate deci considera diferențiala de ordinul doi a funcției $F(x)$, $d^2F(x) = F''(x)\,dx^2$, care cu (3.28) se scrie sub forma

$$d^2F(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}dv^2\right) + \tag{3.29}$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial u}d^2u + \frac{\partial f}{\partial v}d^2v\right),$$

sau

$$d^2F(x) = \left(\frac{\partial}{\partial u}du + \frac{\partial}{\partial v}dv\right)^{(2)} f(u, v) + \left(\frac{\partial}{\partial u}d^2u + \frac{\partial}{\partial v}d^2v\right) f(u, v). \tag{3.30}$$

Dacă funcțiile $u = u(x)$, $v = v(x)$ sînt liniare, $u''(x) = v''(x) = 0$, $d^2u = d^2v = 0$ și din (3.28) și (3.29) deducem

$$F''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \tag{3.31}$$

și

$$d^2F(x) = \left(\frac{\partial}{\partial u}du + \frac{\partial}{\partial v}dv\right)^{(2)} f(u, v). \tag{3.32}$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin inducție completă se demonstrează :

Teorema 2. *Dacă funcțiile $u(x)$ și $v(x)$ au derivate de ordinul n continue pe mulțimea $X \subset R$, iar funcția $f(u, v)$ are derivate parțiale de ordinul n continue pe $Y = \{(u, v) | u = u(x), v = v(x), x \in X\}$, atunci funcția compusă $F(x) = f(u(x), v(x))$ are derivată de ordinul n continuă pe mulțimea X.*

Derivata de ordinul $n > 2$ a funcției $F(x)$ se obține prin derivări succesive a expresiei $F'(x)$ dată de (3.28), iar diferențiala de ordinul n este $d^n F(x) = F^{(n)}(x) dx^n$.

Dacă funcțiile $u = u(x)$, $v = v(x)$ sînt liniare, din (3.31) prin inducție deducem

$$F^{(n)}(x) = \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{dv}{dx} \right)^{(n)} f(u, v), \tag{3.33}$$

astfel că

$$d^n F(x) = \left(\frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv \right)^{(n)} f(u, v). \tag{3.34}$$

Teorema 2 se formulează analog în cazul funcției compuse $F(x) = f(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$; derivatele și diferențialele ei se calculează la fel.

Astfel, pentru a calcula derivatele de ordin superior ale funcției $F(x)$, se derivează succesiv derivata $F'(x)$ dată de (3.25), utilizînd regulile de derivare ale funcțiilor de o singură variabilă și ale funcțiilor compuse $\frac{\partial f}{\partial u_i}$, $i = 1 \div n$.

Dacă funcțiile $u_i = u_i(x)$ sînt liniare, din (3.25) prin inducție deducem

$$F^{(n)}(x) = \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \frac{du_1}{dx} + \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{du_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial}{\partial u_n} \frac{du_n}{dx} \right)^{(n)} f(u_1, u_2, \ldots, u_n), \tag{3.35}$$

astfel că $d^n F(x) = F^{(n)}(x) dx^n$ va fi

$$d^n F(x) = \left(\frac{\partial}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} du_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial u_n} du_n \right)^{(n)} f(u_1, u_2, \ldots, u_n). \tag{3.36}$$

Teorema 3. *Dacă funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ au derivate parțiale continue pe mulțimea $X \subset R^2$, iar funcția $f(u, v)$ are derivate parțiale continue pe mulțimea $Y = \{(u, v) | u = u(x, y), v = v(x, y), (x, y) \in X\}$, atunci funcția compusă $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ are derivate parțiale de ordinul întîi*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned} \tag{3.37}$$

continue pe mulțimea X.

Afirmațiile rezultă dacă utilizăm teorema 1, avînd în vedere că derivatele parțiale presupun menținerea constantă a celorlalte variabile. Derivatele se obțin utilizînd regula de derivare (3.24) și ele sînt funcții continue, fiind exprimate prin operații cu funcții continue.

Scanned with OKEN Scanner

Funcția $F(x, y)$ va fi deci diferențiabilă și, cu (3.37), diferențiala sa

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

se poate exprima sub forma

$$dF(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right).$$

Deci

$$dF = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = \left(\frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv\right) f(u, v). \tag{3.38}$$

Teorema 1 fiind valabilă și în cazul a n funcții, rezultă că teorema 3 e valabilă în cazul funcțiilor $u_i(x, y)$, $i = 1 \div n$; derivatele funcției

$F(x, y) = f(u_1(x, y), u_2(x, y), \ldots, u_n(x, y))$ se deduc din (3.25) și sînt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial y}, \tag{3.39}$$

iar diferențiale funcției $F(x, y)$

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy,$$

avînd în vedere (3.39), se scrie sub forma

$$dF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x} dx + \frac{\partial u_i}{\partial y} dy\right).$$

Deci

$$dF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i} du_i = \left(\frac{\partial}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} du_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial u_n} du_n\right) f(u_1, u_2, \ldots, u_n). \tag{3.40}$$

Așa cum au fost demonstrate afirmațiile anterioare, rezultă că ele sînt valabile și dacă $u_i = u_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $i = 1 \div n$, sînt funcții de m variabile. În acest caz derivatele parțiale de ordinul întîi ale funcției $F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ sînt

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \qquad i = 1 \div m, \tag{3.41}$$

iar diferențiala

$$dF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i,$$

avînd în vedere (3.41), se scrie sub forma

$$dF = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) dx_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i = du_j,$$

rezultă

$$(3.42) \quad dF = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j} du_j = \left(\frac{\partial}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} du_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial u_n} du_n \right) f(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Prin inducție completă se demonstrează :

Teorema 4. *Dacă funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ au derivate parțiale de ordinul n continue pe $X \subset R^2$, iar funcția $f(u, v)$ are derivate parțiale de ordinul n continue pe $Y = \{(u, v) | u = u(x, y), v = v(x, y), (x, y) \in X\}$, atunci funcția compusă $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ are derivate parțiale de ordinul n continue pe X.*

Teorema e adevărată și în cazul general al funcției compuse $F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, unde $u_i = u_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $i = 1 \div n$.

Derivatele de ordin superior ale funcției compuse F se obțin prin derivări succesive, pornind de la derivata de ordinul întîi (3.37) în cazul funcției $F(x, y) = f(u, v)$, respectiv (3.41) în cazul general.

Astfel, în cazul funcției $F(x, y) = f(u, v)$, derivînd expresiile (3.37) obținem derivatele de ordinul doi

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Dacă $u(x, y)$, $v(x, y)$ sînt funcții liniare, derivatele lor de ordinul doi sînt nule și cum $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$ (vezi teorema lui Schwarz), obținem expresii mult simplificate ale derivatelor :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y},$$

Scanned with OKEN Scanner

iar diferențiala de ordinul doi a funcției $F(x, y)$ este

$$d^2F(x,y)=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}dy^2=$$

$$=\frac{\partial^2f}{\partial u^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)^2+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)^2\right]+$$

$$+2\frac{\partial^2f}{\partial u\partial v}\left[\frac{\partial u}{\partial x}dx\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial u}{\partial y}dy\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial^2f}{\partial v^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)^2\right]=$$

$$=\frac{\partial^2f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)^2+2\frac{\partial^2f}{\partial u\partial v}dv\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+$$

$$+\frac{\partial^2f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)^2.$$

Deci

$$d^2F(x,y)=d^2f[u(x,y),v(x,y)]= \tag{3.43}$$

$$=\frac{\partial^2f}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2f}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2f}{\partial v^2}dv^2=\left(\frac{\partial}{\partial u}du+\frac{\partial}{\partial v}dv\right)^{(2)}f(u,v).$$

Dacă funcțiile u_i sînt liniare, așa cum s-a observat, expresiile derivatelor și diferențialelor de ordin superior sînt mult simplificate. Astfel, prin inducție completă (vezi (3.43)), rezultă în acest caz

$$d^nF(x,y)=d^nf(u(x,y),v(x,y))= \tag{3.44}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial u}du+\frac{\partial}{\partial v}dv\right)^{(n)}f(u,v)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i\frac{\partial^nf}{\partial u^{n-i}\,\partial v^i}(du)^{n-i}(dv)^i.$$

De asemenea, prin inducție completă (vezi (3.42)) se arată

$$d^kF(x_1,x_2,\ldots,x_n)=d^kf(u_1,u_2,\ldots,u_n)= \tag{3.45}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial}{\partial u_2}du_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial u_n}du_n\right)^{(k)}f(u_1,u_2,\ldots,u_n).$$

3.9. FORMULA LUI TAYLOR PENTRU FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE

Fie funcția $f(u, v)$ definită pe mulțimea $E\subset R^2$ cu derivate parțiale pînă la ordinul $n+1$ continue într-o vecinătate V a punctului (a, b), interior mulțimii E.

Scanned with OKEN Scanner

Considerăm punctul $(x, y)\in V$ și

$$u=a+(x-a)\,t,\quad v=b+(y-b)\,t,\quad t\in[0,\ 1], \tag{3.46}$$

ecuațiile unui segment de dreaptă din plan.

Pentru $t=0$, $u=a$, $v=b$ și $(u, v)=\in V$; pentru $t=1$, $u=x$, $v=y$ și $(u, v)\in V$. Rezultă că punctul (x, y) poate fi astfel ales ca toate punctele (u, v) ale segmentului definit de (3.46) să fie în vecinătatea V.

Cu ipotezele făcute, funcția compusă

$$F(t)=f[u(t),\ v(t)]=f\ [a+(x-a)\,t,\ b+(y-b)\,t],\ t\in[0,\ 1]$$

are derivate pînă la ordinul $n+1$ continue pe $[0, 1]$, astfel că putem scrie formula lui Taylor de ordinul n corespunzătoare funcției $F(t)$, vezi (2.36)

$$F(1)=F(0)+\frac{1}{1!}F'(0)+\frac{1}{2!}F''(0)+\ldots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)+R_n, \tag{3.47}$$

unde

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta),\quad 0<\theta<1. \tag{3.48}$$

Cu (3.33) calculăm

$$F^{(k)}(t)=\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)^{(k)}f(u,v),\qquad k=1\div(n+1).$$

Rezultă

$$F^{(k)}(t)=\left(\frac{\partial}{\partial u}(x-a)+\frac{\partial}{\partial v}(y-b)\right)^{(k)}f(u,v),$$

iar

$$F^{(k)}(0)=\left(\frac{\partial}{\partial u}(x-a)+\frac{\partial}{\partial v}(y-b)\right)^{(k)}f(a,b),\ k=1\div n$$

$$F^{(n+1)}(\theta)=\left(\frac{\partial}{\partial u}(x-a)+\frac{\partial}{\partial v}(y-b)\right)^{(n+1)}f\ [a+\theta(x-a),\ b+\theta(y-b)],\ 0<\theta<1,$$

astfel că notînd cu x și y argumentele funcției $f(u, v)$, rezultă

$$F^{(k)}(0)=\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)}f(a,\ b),\qquad k=1\div n,$$

$$F^{(n+1)}(\theta)=\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n+1)}f[a+\theta(x-a),\ b+\theta(y-b)]$$

și cum $F(0)=f(a,\ b)$, $F(1)=f(x,\ y)$, prin înlocuiri, din (3.47), obținem

$$f(x,\ y)=f(a,\ b)+ \tag{3.49}$$

$$+\frac{1}{1!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]f(a,\ b)+\frac{1}{2!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(2)}f(a,b)+$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n)}f(a,\ b)+R_n,$$

formula lui Taylor pentru funcția $f(x,y)$ în punctul (a,b).

Scanned with OKEN Scanner

Din (3.48) deducem

$$(3.50)\quad R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n+1)}f[a+\theta(x-a),b+\theta(y-b)],$$

restul de ordinul n din formula lui Taylor.

Observații. 1° Dacă notăm $\rho=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ distanța dintre punctele $P(a, b)$ și $Q(x, y)$, atunci

$$(3.51)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{|R_n|}{\rho^n}=0.$$

Într-adevăr, considerînd unghiul $\alpha=\sphericalangle(ox, PQ)$

$$\left.\begin{aligned}x-a&=\rho\cos\alpha,\\ y-b&=\rho\sin\alpha\end{aligned}\right\}\quad\alpha\in[0,\ 2\pi)$$

și R_n poate fi scris sub forma

$$R_n=\frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!}\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)}f[a+\theta(x-a),\ b+\theta(y-b)].$$

Cum funcția f are derivatele parțiale de ordinul $n+1$ continue, ele sînt mărginite, deci există un număr $M>0$ astfel ca

$$\left|\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)}f[a+\theta(x-a),\ b+\theta(y-b)]\right|<M.$$

Rezultă

$$|R_n|<\frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!}M,$$

încît

$$\lim_{\rho\to0}\frac{|R_n|}{\rho^n}\leqslant\lim_{\rho\to0}\frac{\rho}{(n+1)!}M=0.$$

2°. Dacă funcția $f(x, y)$ are derivate parțiale de ordinul întîi continue într-o vecinătate V a punctului (a, b), atunci se poate scrie formula (3.49) cu $n=0$ și obținem

$$(3.52)\quad f(x, y)-f(a, b)=(x-a)f'_x(\lambda, \mu)+(y-b)f'_y(\lambda, \mu)$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda&=a+\theta(x-a)\in(a, x),\\ \mu&=b+\theta(y-b)\in(b, y)\end{aligned}\right\}\quad\theta\in(0,\ 1),$$

formula lui Langrange (*formula creșterilorfinite*) pentru funcția de două variabile.

Așa cum au fost făcute demonstrațiile, observăm că rezultatele obținute sînt valabile și în cazul funcției de n variabile $f(X)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Astfel, considerînd $A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se deduce analog

$$(3.53)\quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=f(a_1, a_2, \ldots, a_n)+$$

$$+\frac{1}{1!}\left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+(x_2-a_2)\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+(x_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]f(A)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+(x_2-a_2)\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+(x_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(2)}f(A)+$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+(x_2-a_2)\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+(x_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(n)}f(A)+R_n,$$

formula lui Taylor pentru funcții de n variabile.

Restul R_n e dat de o expresie similară cu (3.50) și are proprietatea (3.51).

3.10. EXTREMELE FUNCȚIILOR DE MAI MULTE VARIABILE

Fie funcția de n variabile $f: E\to R$ $(E\subset R^n)$ și un punct $X_0\in E$.

Dacă există o vecinătate V a punctului X_0 astfel ca :

1^0 $f(X)-f(X_0)\geqslant 0$, $\forall X\in V\cap E$, X_0 se numește *punct de minim al funcției*, iar dacă

2^0 $f(X)-f(X_0)\leqslant 0$, $\forall X\in V\cap E$, X_0 se numește *punct de maxim al funcției*.

Punctului X_0 i se mai zice *punct de extrem al funcției*.

Valoarea funcției în punctul X_0 se numește *minimul*, respectiv *maximul* funcției.

Maximele și minimele unei funcții, așa cum au fost definite, sînt de fapt *maxime*, respectiv *minime locale* (*relative*) ale funcției. Ele se mai numesc *extreme relative*.

Pentru determinarea punctelor de extrem vom considera pentru început cazul funcțiilor de două variabile.

Fie deci funcția de două variabile $f(x, y): E\to R$, $E\subset R^2$.

Spunem că punctul (a, b) e *punct staționar* al funcției $f(x, y)$, dacă e interior mulțimii E și funcția are derivatele parțiale de ordinul întîi nule în acest punct

$$f'_x(a, b)=0,\ f'_y(a, b)=0.$$

Următoarea teoremă exprimă o condiție necesară ca un punct interior mulțimii de definiție a funcției să fie punct de extrem.

Teoremă. *Dacă funcția $f(x, y): E\to R$ are derivate parțiale într-un punct de extrem (a, b), interior mulțimii E, atunci acest punct e punct staționar al funcției.*

Cu ipotezele făcute funcția de o singură variabilă

$$\varphi(x)=f(x, b): E_x=\{x\,|\,(x, b)\in E\}\to R$$

e derivabilă în punctul $x=a$. Cum punctul $x=a$, interior mulțimii E_x, e punct de extrem al funcției $\varphi(x)$, conform teoremei lui Fermat

$$\varphi'(a)=f'_x(a, b)=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Analog, aplicînd teorema lui Fermat funcției parțiale

$$\psi(y)=f(a,\ y):E_y=\{y\mid(a,y)\in E\}\to R,$$

deducem că

$$\psi'(b)=f'_y(a,\ b)=0.$$

Cum punctul (a,b) e interior mulțimii E, el e punct staționar al mulțimii.

Această teoremă se formulează și se demonstrează analog în cazul funcției de n variabile $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n):E\to R$ $(E\subset R^n)$ și reprezintă o generalizare a teoremei lui Fermat, pentru funcții de n variabile.

Dacă mulțimea E e o mulțime deschisă, punctele staționare ale funcției $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ sînt soluțiile sistemului

$$\text{(3.54)}\qquad \begin{cases} f'_{x_1}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=0\\ f'_{x_2}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ f'_{x_n}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=0, \end{cases}$$

iar punctele de extrem ale funcției f se află printre aceste soluții. Stabilim care dintre ele sînt puncte de extrem cu ajutorul unor teoreme care exprimă „condiții suficiente de extrem".

Astfel, în cazul funcțiilor de două variabile, dispunem de următoarea

Teoremă. *Fie $(a,\ b)$ un punct staționar al funcției $f(x,\ y)$, care are derivate parțiale de ordinul trei continue într-o vecinătate V a punctului $(a,\ b)$. Notînd*

$$r=\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2},$$

rezultă:

1°. Dacă $rt-s^2>0$, punctul $(a,\ b)$ e punct de extrem; de minim dacă $r>0$, de maxim dacă $r<0$.

2°. Dacă $rt-s^2<0$, punctul $(a,\ b)$ nu e punct de extrem.

În ipotezele teoremei, putem scrie formula lui Taylor de ordinul doi în $(a,\ b)$. Cu notațiile făcute, avînd în vedere că

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}=\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}=0,$$

obținem, vezi (3.49),

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{2!}[r(x-a)^2+2s(x-a)(y-b)+t(y-b)^2]+R_2.$$

Dacă $\alpha=\sphericalangle(ox,\ AX)$, unde $A=(a,\ b)$, $X=(x,\ y)$ și $\rho=d(A,X)$

$$\begin{aligned} x-a&=\rho\cos\alpha\\ y-b&=\rho\sin\alpha, \end{aligned}\qquad \alpha\in[0,\ 2\pi)$$

Scanned with OKEN Scanner

și dacă $\alpha \neq 0$, deci $y-b \neq 0$

(3.55) $$f(x, y)-f(a, b)=$$

$$=\frac{(y-b)^2}{2!}\left\{\left[r\left|\frac{x-a}{y-b}\right|^2+2s\left|\frac{x-a}{y-b}\right|+t\right]+\frac{R_2}{\rho^2}\cdot\frac{2}{\sin^2\theta}\right\}.$$

Dacă $\alpha=0$, atunci $x-a\neq 0$ și se scoate factor comun forțat $(x-a)^2$.
Avînd în vedere (3.51)

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{|R_2|}{\rho^2}=0,$$

deci există o vecinătate V a punctului $A=(a,b)$ astfel ca, pentru orice punct $X=(x, y)\in V$ semnul diferenței (3.55) să fie semnul trinomului de grad doi

$$T(z)=rz^2+2sz+t,$$

în care $z=\frac{x-a}{y-b}$.

Dacă $s^2-rt<0$, trinomul păstrează semn constant, semnul lui r.
Deci, pentru orice $X=(x, y)\in V$:

1° dacă $rt-s^2>0$

$f(x, y)-f(a, b)\geqslant 0$ cînd $r>0$ și (a, b) e punct de minim,

$f(x, y)-f(a, b)\leqslant 0$ cînd $r<0$ și (a, b) e punct de maxim,

2°. dacă $rt-s^2<0$, trinomul $T(z)$, deci diferența $f(x, y)-f(a, b)$, nu păstrează semn constant și (a, b) nu e punct de extrem.

Pentru a stabili dacă punctul staționar $A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ al funcției $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e punct de extrem, dispunem de următoarea :

Teoremă. *Fie $A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un punct staționar al funcției $f(X)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ care are derivatele de ordinul trei continue într-o vecinătate a punctului A și*

$$A_{ij}=\frac{\partial^2 f(a_1, a_2, \ldots, a_n.)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j=1\div n.$$

1°. *Dacă toate numerele*

(3.56) $$\Delta_1=|A_{11}|,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n=\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn}\end{vmatrix}$$

sînt pozitive, A e punct de minim.

2°. *Dacă toate numerele*

(3.57) $$\Delta_1^*=-|A_{11}|,\ \Delta_2^*=\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n^*=(-1)^n\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn}\end{vmatrix}$$

sînt pozitive, A e punct de maxim.

Scanned with OKEN Scanner

În ipotezele teoremei se poate scrie formula lui Taylor de ordinul doi corespunzătoare funcției $f(X)$ în punctul A, vezi (3.53). Punctul A fiind punct staționar

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - a_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(2)} f(A) + R_2.$$

Notînd $\rho = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}$ distanța dintre punctele A și X

$$f(X) - f(A) = \tag{3.58}$$

$$= \frac{\rho^2}{2!}\left[\left(\frac{x_1-a_1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_2-a_2}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \frac{x_n-a_n}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(2)} f(A) + 2\frac{R_2}{\rho^2}\right]$$

și cum

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{|R_2|}{\rho^2} = 0,$$

există o vecinătate V a punctului A astfel ca semnul diferenței (3.58) să fie dat de

$$\left(\frac{x_1-a_1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_2-a_2}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \frac{x_n-a_n}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(2)} f(A) = \frac{1}{\rho^2} P(X),$$

unde

$$P(X) = \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - a_i)\ (x_j - a_j)$$

e o formă pătratică în $(x_i - a_i)$, $i = 1 \div n$.

Rezultă că :

1^0. dacă condițiile (3.56) sînt îndeplinite, forma pătratică $P(X)$ e pozitiv definită, deci

$$f(X) - f(A) \geqslant 0, \quad \forall X \in V$$

și A e punct de minim al funcției.

2^0. dacă condițiile (3.57) sînt îndeplinite, forma pătratică $P(X)$ e negativ definită, deci

$$f(X) - f(A) \leqslant 0, \quad \forall X \in V$$

și A e punct de maxim al funcției.

Aplicații. 1^0. Să se determine punctele de extrem ale funcției

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y,$$

definită pe domeniul maxim de definiție.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Domeniul de definiție e R^2 astfel că orice punct $(x, y)\in R^2$ e interior lui R^2 și punctele staționare ale funcției sînt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2+3y^2-15=0 \\ f'_y = 6xy-12 \quad\;\; =0. \end{cases}$$

Sistemul are patru soluții, reprezentînd punctele staționare $A=(2,\ 1)$, $B=(-2,\ -1)$, $C=(1,\ 2)$, $D=(-1,\ -2)$.

Avem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=6y,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6x,$$

și :

— în cazul punctului $A=(2,\ 1)$, $r=12$, $s=6$, $t=12$; cum $rt-s^2=144-36>0$, iar $r>0$, A e punct de minim ;

— în cazul punctului $B=(-2,\ -1)$, $r=-12$, $s=-6$, $t=-12$; cum $rt-s^2=144-36>0$, iar $r<0$, B e punct de maxim ;

— în cazul punctului $C=(1,\ 2)$, $r=6$, $s=12$, $t=6$; cum $rt-s^2=36-144<0$, C nu e punct de extrem ;

— în cazul punctului $D=(-1,\ -2)$, $r=-6$, $s=-12$, $t=-6$; cum $rt-s^2=36-144<0$, D nu e punct de extrem.

2^0. Să se determine punctele de extrem ale funcției

$$f(x, y, z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z},$$

definită pe mulțimea $E=\{(x, y, z)|\ x>0,\ y>0,\ z>0\}$.

Rezolvare. Domeniul de definiție fiind o mulțime deschisă, punctele staționare ale funcției sînt soluțiile pozitive ale sistemului

$$\begin{cases} f'_x = 1-\dfrac{y^2}{4x^2}=0 \\ f'_y = \dfrac{y}{2x}-\dfrac{z^2}{y^2}=0 \\ f'_z = \dfrac{2z}{y}-\dfrac{2}{z^2}=0. \end{cases}$$

Sistemul are o singură soluție pozitivă, punctul staționar $A=\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 1\right)$.

Cum

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{y^2}{2x^3},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{2x}+\frac{2z^2}{y^3},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{2}{y}+\frac{4}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=-\frac{y}{2x^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}=-\frac{2z}{y^2},$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă

$$A_{11}=4,\quad A_{22}=3,\quad A_{33}=6,\quad A_{12}=A_{21}=-2,\quad A_{13}=A_{31}=0,\quad A_{23}=A_{32}=-2,$$

iar

$$\Delta_1=4>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 3\end{vmatrix}=8>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 6\end{vmatrix}=32>0$$

și A e punct de minim.

3.11. FUNCȚII IMPLICITE

Considerăm ecuația

$$F(x,y)=0, \tag{3.59}$$

unde $F(x,y)$ e o funcție definită pe mulțimea $E\subset R^2$.

Fie E_x proiecția lui E pe axa ox: $E_x=\{x\,|\,$există $y\in R$, astfel ca $(x,y)\in E\}\subset R$ și $A\subset E_x$.

Vom spune că $f(x): A\to R$ e *soluție (în raport cu y) a ecuației* (3.59), *pe mulțimea* A, dacă

$$F(x,f(x))=0,\quad \forall x\in A.$$

Ecuația $F(x,y)=0$ poate avea mai multe soluții, o soluție sau nici o soluție.

Dacă există o singură funcție $y=f(x)$ definită pe mulțimea A, care să verifice ecuația $F(x,y)=0$, eventual și alte condiții suplimentare, spunem că funcția $f(x)$ e definită de ecuația $F(x,y)=0$. Se spune de asemenea că rezolvînd ecuația $F(x,y)=0$ în raport cu y se obține funcția $y=f(x)$.

Definiție. Funcțiile $y=f(x)$ definite cu ajutorul ecuațiilor $F(x,y)=0$ se numesc *funcții definite implicit* sau mai scurt, *funcții implicite*.

Astfel, ecuația

$$F(x,y)=e^{(x^2+2)y}-x^2-1=0, \tag{3.60}$$

unde funcția $F(x,y)$ e definită pe R^2, e ecuația funcției implicite y, a cărei formă explicită

$$y=\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+2},\qquad x\in R$$

se obține rezolvînd ecuația (3.60).

În general, determinarea soluției ecuației $F(x,y)=0$ este dificilă sau imposibilă. Putem însă face un studiu direct al funcției $F(x,y)$, stabilind teoreme (de existență) care exprimă condiții de existență și proprietăți ale funcției implicite y. Prezentăm astfel:

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 1. *Fie* $F(x, y)$ *o funcție definită pe mulțimea* $X \times Y \subset R^2$ *și* (x_0, y_0) *un punct interior mulțimii* $X \times Y$.

Dacă:

1^0. $F(x_0, y_0) = 0$.

2^0. $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ *sînt continue în vecinătatea* $U \times V \subset X \times Y$ *a lui* (x_0, y_0).

3^0. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$,

atunci:

$1'$. *există o vecinătate* $U_0 \times V_0$ *a lui* (x_0, y_0) *și o funcție unică* $y = f(x) : U_0 \to V_0$ *continuă, astfel ca*

$$f(x_0) = y_0 \text{ și } F(x, f(x)) = 0, \ \forall x \in U_0.$$

$2'$. *funcția* $f(x)$ *are derivata*

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \ x \in U_0, \ y = f(x), \tag{3.61}$$

continuă pe U_0.

$3'$. *dacă* $F(x, y)$ *are derivate parțiale de ordinul* k *continue pe* $U \times V$, *atunci* $f(x)$ *are derivată de ordinul* k, *continuă pe* U_0.

$1'$. Cum F'_y e continuă pe $U \times V$, iar $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ există o vecinătate $U_1 \times V_1$ a lui (x_0, y_0), $U_1 \times V_1 \subset U \times V$, în care $F'_y(x, y) \neq 0$.

Vom presupune că

$$F'_y(x, y) > 0, \quad (x, y) \in U_1 \times V_1,$$

încît funcția parțială $\varphi(y) = F(x, y)$, definită pe V_1 ($x \in U_1$, constant) e strict crescătoare pe V_1. În particular, funcția $F(x_0, y)$ e strict crescătoare pe V_1 și cum $F(x_0, y_0) = 0$, există un interval $(\alpha, \beta) = V_0 \subset V_1$ (V_0 — vecinătate a lui y_0) astfel ca

$$F(x_0, \alpha) < 0.$$

$$F(x_0, \beta) > 0.$$

Funcțiile $F(x, \alpha)$ și $F(x, \beta)$ fiind continue în x_0, există vecinătățile $U' \subset U_1$ și $U'' \subset U_1$ ale punctului x_0, unde

$$F(x, \alpha) < 0, \ \forall x \in U'$$

$$F(x, \beta) > 0, \ \forall x \in U''.$$

Dacă notăm $U_0 = U' \cap U''$, deducem că pentru orice punct $x' \in U_0$:

a) $F(x', \alpha) < 0$, $F(x', \beta) > 0$,

b) $F(x', y)$ e continuă pe $[\alpha, \beta]$,

c) $F(x', y)$ e strict crescătoare pe $[\alpha, \beta]$,

și deci există un punct $y' \in (\alpha, \beta) = V_0$ și numai unul pentru care $F(x', y') = 0$ (proprietatea Darboux), iar ecuația $F(x, y) = 0$, $(x, y) \in U_0 \times V_0$ definește implicit funcția

$$y = f(x) : U_0 \to V_0,$$

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 1. *Fie* $F(x, y)$ *o funcție definită pe mulțimea* $X \times Y \subset R^2$ *și* (x_0, y_0) *un punct interior mulțimii* $X \times Y$.

Dacă :

1^0. $F(x_0, y_0) = 0$.

2^0. $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ *sînt continue în vecinătatea* $U \times V \subset X \times Y$ *a lui* (x_0, y_0).

3^0. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$,

atunci :

$1'$. *există o vecinătate* $U_0 \times V_0$ *a lui* (x_0, y_0) *și o funcție unică* $y = f(x) : U_0 \to V_0$ *continuă, astfel ca*

$$f(x_0) = y_0 \text{ și } F(x, f(x)) = 0, \ \forall x \in U_0.$$

$2'$. *funcția* $f(x)$ *are derivata*

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \ x \in U_0, \ y = f(x), \tag{3.61}$$

continuă pe U_0.

$3'$. *dacă* $F(x, y)$ *are derivate parțiale de ordinul* k *continue pe* $U \times V$, *atunci* $f(x)$ *are derivată de ordinul* k, *continuă pe* U_0.

$1'$. Cum F'_y e continuă pe $U \times V$, iar $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ există o vecinătate $U_1 \times V_1$ a lui (x_0, y_0), $U_1 \times V_1 \subset U \times V$, în care $F'_y(x, y) \neq 0$.

Vom presupune că

$$F'_y(x, y) > 0, \quad (x, y) \in U_1 \times V_1,$$

încît funcția parțială $\varphi(y) = F(x, y)$, definită pe V_1 ($x \in U_1$, constant) e strict crescătoare pe V_1. În particular, funcția $F(x_0, y)$ e strict crescătoare pe V_1 și cum $F(x_0, y_0) = 0$, există un interval $(\alpha, \beta) = V_0 \subset V_1$ (V_0 — vecinătate a lui y_0) astfel ca

$$F(x_0, \alpha) < 0.$$

$$F(x_0, \beta) > 0.$$

Funcțiile $F(x, \alpha)$ și $F(x, \beta)$ fiind continue în x_0, există vecinătățile $U' \subset U_1$ și $U'' \subset U_1$ ale punctului x_0, unde

$$F(x, \alpha) < 0, \ \forall x \in U'$$

$$F(x, \beta) > 0, \ \forall x \in U''.$$

Dacă notăm $U_0 = U' \cap U''$, deducem că pentru orice punct $x' \in U_0$:

a) $F(x', \alpha) < 0$, $F(x', \beta) > 0$,

b) $F(x', y)$ e continuă pe $[\alpha, \beta]$,

c) $F(x', y)$ e strict crescătoare pe $[\alpha, \beta]$,

și deci există un punct $y' \in (\alpha, \beta) = V_0$ și numai unul pentru care $F(x', y') = 0$ (proprietatea Darboux), iar ecuația $F(x, y) = 0$, $(x, y) \in U_0 \times V_0$ definește implicit funcția

$$y = f(x) : U_0 \to V_0,$$

Scanned with OKEN Scanner

care reaalizează corespondența

$$x' \xrightarrow{f} y' = f(x'), \quad x' \in U_0,$$

în care y' satisface condiția $F(x', y') = 0$.

Cum $F(x_0, y_0) = 0$, rezultă corespondența

$$x_0 \xrightarrow{f} y_0 = f(x_0).$$

Continuitatea funcției $f(x)$ rezultă din contextul demonstrației : la o vecinătate $V_0 = (\alpha, \beta)$ a punctului y_0, care poate fi luată oricît de restrînsă, există o vecinătate U_0 a punctului x_0 astfel ca $\forall x \in U_0$, $f(x) = y \in V_0$ și funcția e continuă în punctul x_0. Repetînd demonstrația pentru punctul $x' \in U_0$ (pentru care sînt satisfăcute ipotezele din teoremă) deducem că funcția $y = f(x)$ e continuă în x', deci pe U_0.

2'. În ipotezele teoremei, putem scrie formula Lagrange pentru punctele $A = (a, b)$ și $X = (x, y)$ din $U_0 \times V_0$

$$F(x, y) - F(a, b) = F'_x(\xi, \eta)(x - a) + \tag{3.62}$$

$$+ F'_y(\xi, \eta)(y - b), \qquad \xi \in (a, x), \ \eta \in (b, y),$$

în care punctele A și X le alegem astfel ca $b = f(a)$, $y = f(x)$.

Avem deci

$$F(a, b) = 0, \qquad F(x, y) = 0$$

și din (3.62) obținem raportul

$$\frac{y - b}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\frac{F'_x(\xi, \eta)}{F'_x(\xi, \eta)}.$$

Trecînd la limită pentru $x \to a$ (în acest caz $y \to b$, $\xi \to a$, $\eta \to b$), deducem

$$f'(a) = -\frac{F'_x(a, b)}{F'_y(a, b)}, \qquad b = f(a).$$

Rezultă că în punctul $x \in U_0$, arbitrar, derivata funcției $f(x)$ este

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \quad x \in U_0, \ y = f(x) \in V_0$$

și $y' = f'(x)$ e o funcție continuă ca raport de funcții continue.

3' Considerînd $y = f(x)$, obținem funcția compusă (nulă)

$$\Phi(x) = F(x, y) = 0, \ \forall x \in U_0,$$

cu derivata

$$\Phi'(x) = F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot y' = 0, \ \forall x \in U_0. \tag{3.63}$$

Avînd în vedere că $F'_y(x, y) \neq 0$, aflăm

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \qquad x \in U_0. \tag{3.64}$$

Cum y' e o funcție derivabilă, fiind cît de funcții derivabile, considerăm în (3.63) $y=f(x)$ și $\Phi'(x)$ e o funcție compusă (nulă pe U_0), derivabilă și derivata sa este

$$F''_x+F''_{xy}y'+(F''_{yx}+F''_{y^2}y')\,y'+F'_y\,y''=0. \tag{3.65}$$

Deducem derivata

$$y''=-\frac{F''_x+2F''_{xy}\,y'+F''_{y^2}\,y'^2}{F'_y},\quad x\in U_0,$$

care cu (3.64) se scrie

$$y''=-\frac{F''_xF'^2_y+2F''_{xy}F'_xF'_y+F''_{y^2}F'^2_x}{F'^3_y},\quad x\in U_0,$$

și care e o funcție continuă pe U_0, ca raport de funcții continue.

Analog, derivînd succesiv egalitatea (3.65), aflăm derivatele $y^{(3)}$, $y^{(4)}$, ..., $y^{(k)}$; derivata $y^{(k)}$ e continuă — în expresia ei intră derivatele parțiale pînă la ordinul k ale funcției $F(x, y)$, care sînt funcții continue.

Aplicație. Se consideră funcția y de ecuație implicită

$$F(x, y)=x^2-2xy+5y^2-2x+4y+\alpha=0,\ \alpha\in R,\ (x, y)\in R^2.$$

a) Să se determine punctele de extrem ale funcției în cazul $\alpha=1$.

b) Să se determine monotonia funcției și concavitatea graficului curbei $y=y(x)$ în vecinătatea punctului $P=(0,1)$, în cazul $\alpha=-9$.

Rezolvare: a) Pentru ca $X=(x, y)$ să fie punct de extrem e necesar ca

$$\begin{cases} y'(x)=-\dfrac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}=0 \\ F(x, y)=0. \end{cases}$$

Rezultă sistemul

$$\begin{cases} 2x-2y-2=0 \\ x^2-2xy+5y^2-2x+4y+1=0, \end{cases}$$

cu soluțiile $A=(1, 0)$, $B=\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Stabilim dacă punctele A și B sînt puncte de extrem utilizînd derivata de ordinul doi a funcției y. Pentru aceasta, derivăm succesiv de două ori funcția $F(x, y)$, ca o funcție compusă și obținem ecuațiile:

$$(\alpha)\ 2x-2y-(2x-4)\,y'+10yy'-2=0$$

$$(\beta)\ 2-4y'+10y'^2+(-2x+10y+4)\,y''=0.$$

În cazul punctului $A=(1, 0)$, $y'=0$ și din (β) deducem $y''=-1<0$; A este deci punct de maxim, maximul funcției fiind $y(1)=0$.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul punctului $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $y'=0$ și din (β) deducem $y''=-\frac{1}{4}<0$; B este deci punct de maxim, maximul funcției fiind $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

b) Din ecuația (α), sau cu formula (3.61), deducem

$$y'(0)=\frac{2}{7}>0.$$

Derivata fiind o funcție continuă și pozitivă în $x=0$, ea va fi pozitivă într-o vecinătate V a lui $x=0$, astfel că funcția $y=y(x)$ e strict crescătoare pe mulțimea V.

Avînd $y'(0)=\frac{2}{7}$, din (β) deducem $y''(0)=-\frac{65}{343}<0$ și curba de ecuație $F(x, y)=0$ e concavă în punctul $(0, 1)$.

Considerații similare pot fi făcute în cazul ecuației

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)=0, \tag{3.66}$$

în care $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ e o funcție definită pe mulțimea $E\subset R^{n+1}$.

Într-adevăr, notînd $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ obținem o ecuație

$$F(X, y)=0,$$

analoagă cu (3.59), care definește o *funcție implicită de n variabile*, în condițiile teoremei de existență, ce se formulează și se demonstrează la fel ca teorema 1.

Obținem funcția

$$y=f(X)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

și formulările în acest caz se fac înlocuind pe $x\in R$ cu $X\in R^n$ și derivata $y'=f'(x)$ cu derivatele parțiale $f'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i=1\div n$.

Cu observațiile făcute, dăm fără demonstrație teorema de existență :

Teorema 2. *Fie funcția* $F(X, y)$, $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *definită pe mulțimea* $A\times B$ $A\subset R^n$, $B\subset R$ *și* (X_0, y_0) *interior lui* $A\times B$. *Dacă* :

1^0. $F(X_0, y_0)=0$,

2^0. $F(X, y)$, $F'_y(X, y)$, $F'_{x_i}(X, y)$, $i=1\div n$

sînt continue în vecinătatea $U\times V\subset A\times B$ *a punctului* (X_0, y_0),

3^0. $F'_y(X_0, y_0)\neq 0$,

atunci :

$1'$. *există o vecinătate* $U_0\times V_0$ *a lui* (X_0, y_0) *și o funcție unică*

$$y=f(X)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n): U_0\to V_0$$

continuă, astfel ca

$$f(X_0)=y_0 \text{ și } F(X, f(X))=0, \forall X\in U_0,$$

2'. *funcția* $f(X)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *are derivatele parțiale*

$$f'_{x_i}(X)=-\frac{F'_{x_i}(X, y)}{F'_y(X, y)}, \qquad X\in U_0,\ y=f(X) \tag{3.67}$$

continue pe U_0.

3'. *dacă* $F(X, y)$ *are derivate parțiale de ordinul* k *prin raport cu* y *și* x_i, $i=1\div n$, *continue pe* $U\times V$, *atunci funcția implicită* f *are derivate parțiale de ordinul* k, *continue pe* U_0.

Derivatele de ordinul întîi (3.67) se pot deduce din egalitatea

$$F'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)+F'_y(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)\cdot f'_{x_i}=0, \tag{3.68}$$

obținută prin derivarea prin raport cu x_i a expresiei (3.66), în care se consideră $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Analog, derivînd succesiv expresia (3.68) obținem derivatele de ordin superior ale funcției f.

3.12. SISTEME DE FUNCȚII IMPLICITE

Considerațiile anterioare pot fi extinse și în cazul unui sistem de ecuații

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n)=0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n)=0, \end{cases} \tag{3.69}$$

în care F_i, $i=1\div n$ sînt funcții reale de $m+n$ variabile, definite pe $E\subset R^{m+n}$.

Astfel, numim *soluție a sistemului* (3.69) *în raport cu* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *pe mulțimea* A, *un sistem de funcții*

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ y_2=f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n=f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m), \end{cases} \tag{3.70}$$

definite pe mulțimea A, care satisfac condițiile

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m; f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m))=0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m; f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m))=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m; f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m))=0, \end{cases} \tag{3.71}$$

oricare ar fi $(x_1, x_2, \ldots, x_m)\in A$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă sistemul (3.69) are o singură soluție (3.70), pe mulțimea A, spunem că acest sistem *definește funcțiile* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *implicit*, sau că aceste funcții sînt *funcții implicite*. Vom spune de asemenea că funcțiile (3.70) s-au obținut prin rezolvarea sistemului (3.69), el reprezentînd astfel un *sistem de funcții implicite*.

Și în acest caz vom prezenta o teoremă — teorema de existență, o generalizare a teoremei 2, pentru cazul a n funcții implicite. Teorema exprimă condiții suficiente de existență a funcțiilor (3.70), soluție unică a sistemului (3.69).

Considerăm în acest sens determinantul de ordinul n

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}, \tag{3.72}$$

numit *determinant funcțional* (sau *jacobian*) al funcțiilor $F_1, F_2, \ldots, F_n$ și notăm $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $F=(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ — înțelegînd prin F o funcție vectorială de n coordonate (funcții), definită pe mulțimea E cu valori în R^n.

Cu aceste notații, sistemul de ecuații (3.69) se scrie sub forma

$$F(X, Y)=0, \quad (X, Y)=E^m \times E^n = E \subset R^{m+n} \tag{3.73}$$

și dacă considerăm și funcția vectorială $f=(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ definită pe mulțimea A cu valori în R^n, sistemul (3.70) de n funcții se exprimă printr-o singură funcție (vectorială)

$$Y=f(X) \quad , \quad X \in A. \tag{3.74}$$

Condiția (3.71) ca (3.70) să fie soluție a sistemului (3.69) devine

$$F(X, f(X))=0 \quad , \quad \forall X \in A, \tag{3.75}$$

iar expresia (3.72) a jacobianului scriindu-se sub forma

$$\frac{D(F)}{D(Y)},$$

teorema de existență, în cazul unui sistem de n funcții implicite, este :

Teorema 3. *Fie funcția vectorială* $F=(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ *definită pe mulțimea* $A \times B$, $A \subset R^m$, $B \subset R^n$, *cu valori în* R^n *și punctul* $(X_0, Y_0)=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ *interior mulțimii* $A \times B$. *Dacă* :

1) $F(X_0, Y_0)=0$,

2) *funcțiile* F_i, $i=1 \div n$, *au derivate parțiale continue* $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$, $j=1 \div m$, $\frac{\partial F_i}{\partial y_k}$, $k=1 \div n$, *într-o vecinătate* $U \times V$ *a punctului* (X_0, Y_0),

3) *jacobianul* $\frac{D(F)}{D(Y)}$ *e diferit de zero în punctul* (X_0, Y_0),
atunci :

1'. *există o vecinătate* $U_0 \times V_0$ *a lui* (X_0, Y_0), $U_0 \subset R^m$, $V_0 \subset R^n$ *și o funcție vectorială unică*

$$f(X) = (f_1(X), f_2(X), \ldots, f_n(X)) : U_0 \to V_0,$$

astfel ca

$$Y_0 = f(X_0) \quad \text{și} \quad F(X, f(X)) = 0, \qquad \forall X \in U_0,$$

2'. *funcțiile* $f_1(X), f_2(X), \ldots, f_n(X)$ *au derivate parțiale continue pe* U_0

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = -\frac{\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_i, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_j, y_{i+1}, \ldots, y_n)}}{\frac{D(F)}{D(Y)}}, \qquad \begin{matrix} i = 1 \div n, \\ j = 1 \div m. \end{matrix}$$

3'. *dacă funcțiile* F_i, $i = 1 \div n$, *au derivate parțiale de ordinul* k *continue pe* $U \times V$, *atunci funcțiile* f_i, $i = 1 \div n$, *au derivate parțiale de ordinul* k *continue pe* U_0.

Nu vom da demonstrația, menționăm doar că ea se face prin inducție completă ; pentru $n = 1$ teorema e adevărată fiind teorema 2.

În condițiile teoremei 3 sistemul de ecuații (3.59) are o soluție unică — sistemul de funcții (3.70), definite implicit de sistemul de ecuații (3.69).

3.13. EXTREME CONDIȚIONATE

Fie sistemul de funcții

$$(3.76) \qquad \begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

și funcția $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definite pe $E \subset R^n$, iar

$$A = \{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid X \in E,\ F_i(X) = 0,\ i = 1 \div k\},$$

mulțimea soluțiilor sistemului (3.76).

Spunem că funcția $f(X)$ are în punctul $X_0 \in A$ *extrem relativ la mulțimea* A dacă restricția funcției $f(X)$ la mulțimea A are în X_0 un extrem.

Numim *restricția funcției* $f(X) : E \to R$ *la mulțimea* $A (A \subset E)$, funcția $f(X) : A \to R$.

Deci, în cazul extremelor relative la mulțimea A, se consideră valorile funcției numai pentru acele valori ale argumentelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, care sînt soluții ale sistemului (3.76).

Scanned with OKEN Scanner

Extremele funcției $f(X)$ relative la mulțimea $A \subset E$ se numesc *extreme condiționate de sistemul* (3.76).

Întrucît cele n variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt legate între ele prin cele k ecuații (3.76), extremele condiționate se mai numesc *extreme cu legături*.

Pentru determinarea punctelor de extrem condiționat dăm următoarea teoremă, care exprimă condiții necesare ca un punct să fie punct de extrem condiționat.

Teoremă. *Fie* $X_0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *un punct care verifică sistemul* (3.76). *Dacă*:

1°. *funcțiile* $f(X)$, $F_1(X)$, $F_2(X) \ldots F_k(X)$, *definite pe mulțimea* $E \subset R^n$, *au derivate parțiale continue într-o vecinătate* V *a lui* X_0,

2°. *matricea funcțională* $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{k \times n}$ *are în* X_0 *rangul* k, *egal cu numărul relațiilor sistemului* (3.76), *atunci, dacă* X_0 *e punct de extrem condiționat de sistemul* (3.76), *există* k *numere* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, *astfel ca*

$$(3.77)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f(X_0)}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1(X_0)}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial F_k(X_0)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f(X_0)}{\partial x_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1(X_0)}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial F_k(X_0)}{\partial x_2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f(X_0)}{\partial x_n} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1(X_0)}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial F_k(X_0)}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

Demonstrație. Matricea

$$\left(\frac{\partial F_i(X_0)}{\partial x_j}\right)_{k \times n} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1(X_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1(X_0)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial F_1(X_0)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial F_2(X_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2(X_0)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial F_2(X_0)}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial F_k(X_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_k(X_0)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial F_k(X_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

avînd rangul k, va avea un minor de ordinul k diferit de zero. Pentru a face o alegere, presupunem că acesta este minorul (jacobianul)

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_k)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_k)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1(X_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1(X_0)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial F_1(X_0)}{\partial x_k} \\ \dfrac{\partial F_2(X_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2(X_0)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial F_2(X_0)}{\partial x_k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial F_k(X_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_k(X_0)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial F_k(X_0)}{\partial x_k} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum funcțiile $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i=1\div k$, au derivate parțiale continue într-o vecinătate $V\subset R^n$ a lui X_0, iar $F_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)=0$, $i=1\div k$, din teorema 3, § 3.12, deducem că există o vecinătate $V^k\subset R^k$ a punctului $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0)$ și o vecinătate $V^{n-k}\subset R^{n-k}$ a punctului $(x_{k+1}^0, x_{k+2}^0, \ldots, x_n^0)$, astfel ca pentru orice punct $(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)\in V^{n-k}$ sistemul (3.76) admite în V^k soluția unică

$$(3.78)\qquad \begin{cases} x_1=\varphi_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) \\ x_2=\varphi_2(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), \quad (x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)\in V^{n-k}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k=\varphi_k(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) \end{cases}$$

cu proprietatea

$$(3.79)\qquad x_1^0=\varphi_1(x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0),\ x_2^0=\varphi_2(x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0),$$
$$x_k^0=\varphi_k(x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0).$$

Cum funcțiile

$$(3.80)\qquad \begin{cases} F_1(\varphi_1(x_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n);\ x_{k+1}, \ldots, x_n)=0 \\ F_2(\varphi_1(x_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n);\ x_{k+1}, \ldots, x_n)=0, \ \forall (x_{k+1}, \ldots, x_n)\in V^{n-k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_k(\varphi_1(x_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n);\ x_{k+1}, \ldots, x_n)=0 \end{cases}$$

sînt nule pe V^{n-k} și diferențialele lor vor fi nule pe această mulțime și în particular în punctul $(x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0)\in V^{n-k}$, astfel că, diferențiind (3.80) în acest punct, obținem egalitățile

$$(3.81)\qquad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}d\varphi_1+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial x_k}d\varphi_k+\frac{\partial F_1}{\partial x_{k+1}}dx_{k+1}+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n=0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}d\varphi_1+\ldots+\frac{\partial F_2}{\partial x_k}d\varphi_k+\frac{\partial F_2}{\partial x_{k+1}}dx_{k+1}+\ldots+\frac{\partial F_2}{\partial x_n}dx_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}d\varphi_1+\ldots+\frac{\partial F_k}{\partial x_k}d\varphi_k+\frac{\partial F_k}{\partial x_{k+1}}dx_{k+1}+\ldots+\frac{\partial F_k}{\partial x_n}dx_n=0, \end{cases}$$

în care derivatele $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ sînt calculate în punctul $X_0=(x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0)$, iar diferențialele $d\varphi_j$ în punctul $(x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0)$.

Cum $X_0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ e punct de extrem al funcției $f(X)$, condiționat de ecuațiile (3.76), deci de condițiile (3.78), funcția compusă

$$F(x_{k+1}, \ldots, x_n)=f(\varphi_1(x_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n);\ x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

Scanned with OKEN Scanner

definită pe V^{n-k}, ale cărei variabile nu sînt supuse la legături „sînt libere", are în punctul $(x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0)$ valoare extremă. Derivatele parțiale ale funcției F sînt deci nule în punctul $(x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0)$, astfel că diferențiala sa

$$dF(x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1} d\varphi_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k} d\varphi_k + \tag{3.82}$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} dx_{k+1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

e nulă în acest punct.

Adunînd membru cu membru egalitatea (3.82) cu egalitățile (3.81) înmulțite respectiv cu scalarii $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_k$, obținem

$$dF = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right) d\varphi_1 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right) d\varphi_k + \tag{3.83}$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_{k+1}}\right) dx_{k+1} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right) dx_n = 0.$$

Vom determina scalarii λ_i astfel ca în expresia (3.83) primele k paranteze să fie nule.

Obținem un sistem

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f}{\partial x_k} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_k} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_k} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_k} = 0, \end{cases} \tag{3.84}$$

de k ecuații cu necunoscutele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, compatibil determinat întrucît determinantul sistemului este diferit de zero, fiind transpusul jacobianului $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_k)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_k)}$.

Cu valorile λ_i astfel determinate, diferențiala (3.83) este

$$dF = \left(\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_{k+1}}\right) dx_{k+1} + \tag{3.85}$$

$$+ \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right) dx_n = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $dx_{k+1}, \ldots, dx_n$ pot lua valori arbitrare, condiția (3.85) e îndeplinită numai dacă avem

$$(3.86)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_{k+1}} + \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \dfrac{\partial F_i}{\partial x_{k+1}} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \dfrac{\partial F_i}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

Egalitățile (3.84) și (3.86) ne arată că valorile λ_i determinate și punctul de extrem X_0 satisfac sistemul (3.77).

Un punct X_0 în care matricea funcțională $\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{k\times n}$ are rangul k și care verifică sistemul format din ecuațiile (3.76) și (3.77) pentru anumite valori ale scalarilor λ_i, $i=1\div n$, se numește *punct staționar al funcției* $f(X)$, *condiționat de sistemul* (3.76), iar scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ se numesc *multiplicatorii lui Lagrange.*

Cu aceasta se poate enunța :

Teoremă : Orice punct de extrem condiționat e punct staționar condiționat.

Reciproca nu e adevărată : există puncte staționare condiționate în care funcția nu are un extrem condiționat, teorema exprimînd astfel o condiție necesară, nu însă și suficientă ca un punct să fie punct de extrem condiționat

Bazați pe această teoremă, în cazul în care mulțimea E e o mulțime deschisă, pentru a determina punctele de extrem condiționat ale funcției $f(X)$ determinăm :

I. **Condițiile necesare de extrem.** Pentru aceasta :

1^0. Construim funcția Lagrange

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \ldots + \lambda_k F_k,$$

în care coeficienții λ_i, multiplicatorii lui Lagrange, sînt nedeterminați.

2^0. Formăm sistemul de $n+k$ ecuații

$$(3.87)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi(x_1 \ldots x_n;\ \lambda_1 \ldots \lambda_k)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi(x_1 \ldots x_n;\ \lambda_1 \ldots \lambda_k)}{\partial x_2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial \Phi(x_1 \ldots x_n;\ \lambda_1 \ldots \lambda_k)}{\partial x_n} = 0 \\ F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

cu $(n+k)$ necunoscute $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

Scanned with OKEN Scanner

3°. Determinăm soluțiile $(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ ale sistemului (3.87) și aflăm astfel punctele staționare condiționate $(x_1, \ldots, x_n)$ și valorile $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ ale multiplicatorilor lui Lagrange. Punctele de extrem se află printre aceste puncte staționare.

Pentru a afla care dintre ele sînt puncte de extrem, stabilim :

II. **Condițiile suficiente de extrem.** Presupunem că funcțiile $f(X)$, $F_1(X), \ldots, F_k(X)$ au derivate parțiale de ordinul trei continue într-o vecinătate a punctului staționar $X_0=(x_1^0 \ldots x_n^0)$.

Pentru a afla dacă X_0 e punct de extrem condiționat de sistemul (3.76), evaluăm diferența

$$f(X)-f(X)=f(x_1, \ldots, x_n)-f(x_1^0, \ldots, x_n^0),$$

pentru punctele X care verifică sistemul (3.76). Dar, pentru aceste puncte

$$f(X)-f(X)=\Phi(X)-\Phi(X_0),$$

astfel că, scriind formula lui Taylor de ordinul doi a funcției $\Phi(X)$ în punctul X_0 (în expresia lui $\Phi(X)$ considerăm valorile $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ corespunzătoare lui X_0 date de sistemul (3.87)), avînd în vedere că $\frac{\partial \Phi(X_0)}{\partial x_i}=0$, $i=1 \div n$, obținem

$$\Phi(X)=\Phi(X_0)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x_1-x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+(x_n-x_n^0)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(2)}\Phi(X_0)+R_2$$

și

$$f(X)-f(X_0)=\Phi(X)-\Phi(X_0)= \tag{3.88}$$

$$=\frac{1}{2!}\left[(x_1-x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+(x_n-x_n^0)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(2)}\Phi(X_0)+R_2=\frac{1}{2!}P(X)+R_2.$$

Considerînd ρ distanța dintre X_0 și X,

$$\lim_{\rho \to 0}\frac{|R_2|}{\rho^2}=0$$

și așa cum s-a arătat în cazul extremelor funcțiilor de n variabile, vezi considerațiile legate de (3.58), există o vecinătate V a punctului X_0 astfel ca semnul diferenței (3.88) să fie dat de forma pătratică în $x_i-x_i^0$, $i=1 \div n$,

$$P(X)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}(x_i-x_i^0)(x_j-x_j^0)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j. \tag{3.89}$$

Întrucît variabilele x_i nu sînt independente, ele trebuie să satisfacă condițiile de legătură (3.76), nici diferențialele $dx_i=x_i-x_i^0$ nu sînt independente.

Scanned with OKEN Scanner

Diferențiind în punctul X_0 ecuațiile (3.76), obținem

$$(3.90)\qquad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\,dx_2+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial x_n}\,dx_n=0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\,dx_2+\ldots+\frac{\partial F_2}{\partial x_n}\,dx_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial F_k}{\partial x_2}\,dx_2+\ldots+\frac{\partial F_k}{\partial x_n}\,dx_n=0, \end{cases}$$

condițiile pe care trebuie să le satisfacă diferențialele $dx_i=x_i-x_i^0$. Socotim pe dx_i necunoscute și, cum derivatele $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ sînt calculate în punctul X_0, (3.90) e un sistem liniar omogen în care determinantul $\frac{D(F_1,F_2,\ldots,F_k)}{D(x_1,x_2,\ldots,x_k)}\neq 0$, putem determina pe $dx_1, dx_2,\ldots, dx_k$ în funcție de diferențialele dx_j, $j=(k+1)\div n$. Înlocuind în (3.89) pe dx_i, $i=1\div k$, deducem că

$$\operatorname{sgn}\,[f(X)-f(X_0)]=\operatorname{sgn}\sum_{i,j=1}^{n-k}A_{k+i,k+j}\,dx_{k+i}\,dx_{k+j}=$$

$$(3.91)\qquad =\operatorname{sgn}\sum_{i,j=1}^{n-k}A'_{ij}\,dx'_i\,dx'_j,\qquad \begin{array}{ll} A_{k+i,\,k+j}=A'_{ij}, & i,j=1\div(n-k) \\ dx_{k+\alpha}=dx'_\alpha\ , & \alpha=1\div(n-k). \end{array}$$

În (3.91) A'_{ij} fiind constante, avem o formă pătratică în diferențialele dx'_i, $i=1\div(n-k)$, care iau valori arbitrare.

Considerînd determinanții

$$\Delta_i=\begin{vmatrix} A'_{11} & A'_{12} & \ldots & A'_{1i} \\ A'_{21} & A'_{22} & \ldots & A'_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A'_{i1} & A'_{i2} & \ldots & A'_{ii} \end{vmatrix},\qquad i=1\div(n-k),$$

rezultă că:

1°. dacă toate numerele Δ_i, $i=1\div(n-k)$ sînt pozitive, forma pătratică din (3.91) e pozitiv definită, $f(X)-f(X_0)\geqslant 0$, $\forall X\in V$ și X_0 e punct de minim.

2°. dacă numerele $\Delta_i^*=(-1)^i\Delta_i$, $i=1\div(n-k)$, sînt pozitive, forma pătratică din (3.91) e negativ definită, $f(X)-f(X_0)\leqslant 0$, $\forall X\in V$ și X_0 e punct de maxim.

Metoda utilizată pentru determinarea punctelor de extrem condiționat se numește *metoda multiplicatorilor lui Lagrange*.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicaţie. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei

$$f(X)=f(x,y,z)=xyz,\quad X\in R^3, \tag{3.92}$$

condiţionat de sistemul

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=xy+xz+yz-8=0 \\ F_2(x,y,z)=x+y+z-5=0. \end{cases} \tag{3.93}$$

Rezolvare. Formăm funcţia Lagrange

$$\Phi(x,\ y,\ z;\ \lambda_1,\ \lambda_2)=xyz+\lambda_1(xy+xz+yz-8)+\lambda_2(x+y+z-5),$$

în care λ_1, λ_2 sînt scalari. Punctele staţionare ale funcţiei (3.92), condiţionate de ecuaţiile (3.93), sînt soluţiile sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=yz+\lambda_1 y+\lambda_1 z+\lambda_2=0 & (1) \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=xz+\lambda_1 x+\lambda_1 z+\lambda_2=0 & (2) \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}=xy+\lambda_1 x+\lambda_1 y+\lambda_2=0 & (3) \\ F_1(x,y,z)=xy+xz+yz-8=0 & (4) \\ F_2(x,y,z)=x+y+z-5=0. & (5) \end{cases} \tag{3.94}$$

Scăzînd din ecuaţiile (1) şi (2) ecuaţia (3), obţinem sistemul

$$\begin{cases} (z-x)(y+\lambda_1)=0 \\ (z-y)(x+\lambda_1)=0, \end{cases}$$

echivalent cu sistemele

$$\text{(I)}\ \begin{cases} z-x=0 \\ z-y=0 \end{cases} \qquad \text{(II)}\ \begin{cases} z-x=0 \\ x+\lambda_1=0 \end{cases}$$

$$\text{(III)}\ \begin{cases} z-y=0 \\ y+\lambda_1=0 \end{cases} \qquad \text{(IV)}\ \begin{cases} y+\lambda_1=0 \\ x+\lambda_1=0. \end{cases}$$

Sistemul (I) impune condiţiile $x=y=z$, incompatibile cu ecuaţiile (4) şi (5).
Cu ecuaţiile (II) formăm sistemul

$$\begin{cases} x=-\lambda_1 \\ z=-\lambda_1 \\ x+y+z=5 \\ xy+xz+yz=8 \\ yz+\lambda_1(y+z)+\lambda_2=0, \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

din care aflăm :

— punctul staționar $X_1=(2, 1, 2)$ și $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=4$,

— punctul staționar $X_2=\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$ și $\lambda_1=-\frac{4}{3}$, $\lambda_2=-\frac{4}{3}$..

Considerăm ecuațiile (III) și (IV) și obținem punctele staționare $X_1'=(1, 2, 2)$, $X_2'=\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$, respectiv $X_1''=(2, 2, 1)$, $X_2''=\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

Avînd în vedere simetria în care intră variabilele x, y, z în funcțiile f, F_1 și F_2, considerațiile ulterioare le vom face numai pentru punctele X_1 și X_2, concluziile fiind valabile și pentru punctele X_1', X_1'', respectiv X_2', X_2''.

Pentru a afla dacă X_1 și X_2 sînt puncte de extrem, calculăm derivatele de ordinul doi

$$(3.95)\qquad \begin{cases} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0 \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=z+\lambda_1,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}=y+\lambda_1,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}=x+\lambda_1, \end{cases}$$

cu care, în cazul punctului $X_1=(2, 1, 2)$, cum $\lambda=-2$, așa cum rezultă din (3.89) sgn $[f(X)-f(X_1)]$ este

$$(3.96)\qquad \operatorname{sgn} P(X)=\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}dz^2+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}dxdy+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}dxdz+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}dy\,d\right)=\operatorname{sgn}(-2\,dxdz).$$

Diferențialele dx, dy și dz nu sînt independente, relațiile de legătură dintre ele fiind date de sistemul

$$\begin{cases} dF_1(X_1)=3dx+4dy+3dz=0 \\ dF_2(X_1)=dx+dy+dz=0, \end{cases}$$

din care obținem $dx=-dz$, $dy=0$ și înlocuind în (3.96) deducem că

$$\operatorname{sgn}[f(X)-f(X_1)]=\operatorname{sgn} P(X)=\operatorname{sgn}(2dz^2)=\operatorname{sgn}[2(z-2)^2].$$

Deci $f(X)-f(X_1)\geqslant 0$ și X_1 e punct de minim.

Vor fi de asemenea puncte de minim X_1' și X_1''. Minimul funcției $f(X)$, condiționat de ecuațiile (3.93) este

$$f(X_1)=f(X_1')=f(X_1'')=4$$

În cazul punctului $X_2=\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$, cu $\lambda_1=-\frac{4}{3}$ se calculează derivatele (3.95) și rezultă că

$$(3.97)\qquad \operatorname{sgn}[f(X)-f(X_2)]=\operatorname{sgn} P(X)=\operatorname{sgn}(2dxdz).$$

Scanned with OKEN Scanner

Relaţiile de legătură între diferenţialele dx, dy, dz sînt date de sistemul

$$\begin{cases} dF_1(X_2) = \frac{11}{3}dx + \frac{8}{3}dy + \frac{11}{3}dz = 0 \\ dF_2(X_2) = dx + dy + dz = 0, \end{cases}$$

din care obţinem $dx = -dz$, $dy = 0$, încît (3.97) se scrie

$$\operatorname{sgn}[f(X) - f(X_2)] = \operatorname{sgn}(-2dz^2) = \operatorname{sgn}\left[-2\left(z - \frac{4}{3}\right)^2\right].$$

Deci $f(X) - f(X_2) \leqslant 0$ şi X_2 e punct de maxim.

Vor fi de asemenea puncte de maxim X_2' şi X_2''. Maximul funcţiei $f(X)$, condiţionat de ecuaţiile (3.93), este

$$f(X_2) = f(X_2') = f(X_3'') = \frac{112}{27}.$$

3.14. INTEGRALE CARE DEPIND DE UN PARAMETRU

În aplicaţii apar în mod curent integrale de forma $F(y) = \int_{b(y)}^{a(y)} f(x, y)\, dx$ (în particular $a(y) = a$, $b(y) = b$ sînt constante), $f(x, y)$ fiind o funcţie definită pe mulţimea $[\alpha, \beta] \times Y$, iar Y un interval din R.

Dacă $f(x, y)$ e integrabilă în raport cu x pe $[a(y), b(y)]$, $\forall y \in Y$, integrala $F(y)$ este o funcţie definită pe Y şi se numeşte *integrală care depinde de un parametru*.

Trecerea la limită sub semnul integral

Fie funcţia $f(x, y)$ definită pe mulţimea $X \times Y$ şi y_0 un punct de acumulare al mulţimii Y, nu neapărat din Y şi $g(x) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$, $x \in X$.

Spunem că funcţia $f(x, y)$ *tinde uniform* în y_0 pe mulţimea X către $g(x)$, dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon)$ astfel ca oricare ar fi $x \in X$

$$|f(x, y) - g(x)| < \varepsilon, \text{ dacă } |y - y_0| < \eta(\varepsilon).$$

Considerînd şirul de numere $(y_n)_n$ convergent către y_0, obţinem şirul de funcţii $(f(x, y_n)) = (f_n(x))$ şi condiţia ca $f(x, y)$ să tindă uniform în y_0 pe mulţimea X către $g(x)$ este ca $\forall x \in X$

$$|f(x, y_n) - g(x)| < \varepsilon, \text{ dacă } |y_n - y_0| < \eta(\varepsilon).$$

Cum $y_n \to y_0$ avem $|y_n - y_0| < \eta(\varepsilon)$, dacă $n > N(\varepsilon)$ şi rezultă că $\forall x \in X$

$$|f_n(x) - g(x)| < \varepsilon, \text{ dacă } n > N(\varepsilon).$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci șirul de funcții $(f_n(x))$ e uniform convergent pe mulțimea X către $g(x)$, vezi § 2.3, și aceasta reprezintă o condiție echivalentă cu aceea ca $f(x, y)$ să tindă uniform către $g(x)$.

Următoarea teoremă exprimă condițiile în care se poate interverti ordinea operațiilor de integrare și trecere la limită.

Teoremă. *Fie funcția $f(x, y)$ definită pe $[a, b]\times Y$, continuă pe $[a, b]$ oricare ar fi $y\in Y$ și $g(x)=\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$, y_0 fiind un punct de acumulare al lui Y.*

Dacă $f(x, y)$ tinde uniform către $g(x)$ pe $[a, b]$ în punctul y_0, atunci

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x, y)\,dx=\int_a^b[\lim_{y\to y_0} f(x, y)]\,dx=\int_a^b g(x)\,dx.$$

Într-adevăr, considerînd șirul de numere $(y_n)_n\to y_0$, funcțiile $f(x, y_n)=f_n(x)$ sînt continue și cu cele arătate anterior deducem că șirul de funcții $(f_n(x))$ e uniform convergent către $g(x)$, care este continuă pe $[a, b]$, vezi § 2.3, teoremă.

Cum $f(x, y)$ tinde uniform către $g(x)$ pe $[a, b]$, rezultă că pentru orice $\varepsilon<0$ există un număr $\eta(\varepsilon)$ astfel ca $\forall x\in[a, b]$

$$|f(x, y)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a},\quad \text{dacă}\quad |y-y_0|<\eta(\varepsilon),$$

încît funcția $g(x)$ fiind continuă, ea e integrabilă și putem scrie inegalitățile

$$\left|\int_a^b f(x, y)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x, y)-g(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx=\varepsilon.$$

Rezultă că

$$\left|\int_a^b f(x, y)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx\right|<\varepsilon\quad\text{dacă}\quad|y-y_0|<\varepsilon,$$

și deci

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x, y)\,dx=\int g(x)\,dx=\int_a^b[\lim_{y\to y_0} f(x, y)]\,dx.$$

Derivata integralelor care depind de un parametru

Ne propunem să aflăm condițiile în care funcția $F(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx$ e derivabilă și să deducem regula de derivare a acesteia. Dăm în acest sens următoarea

Teoremă. *Dacă funcția $f(x, y)$ e continuă și are derivata parțială $f'_y(x, y)$ continuă în intervalul $I=[\alpha, \beta]\times[c, d]$, funcțiile $a(y)$ și $b(y)$ au derivate continue pe $[c, d]$, iar curbele $x=a(y)$, $x=b(y)$ se află în I, atunci funcția $F(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx$ e derivabilă pe $[c, d]$ și derivata sa este*

$$F'(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y)\,dx+b'(y)\,f(b(y), y)-a'(y)\,f(a(y), y).$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, notînd

$$\Delta a = a(y+\Delta y) - a(y), \qquad \Delta b = b(y+\Delta y) - b(y),$$

creşterile funcţiilor $a(y)$, respectiv $b(y)$ corespunzătoare creşterii argumentului y cu valoarea Δy, creşterea corespunzătoare a funcţiei $F(y)$ este

$$F(y+\Delta y) - F(y) = \int_{a(y+\Delta y)}^{b(y+\Delta y)} f(x, y+\Delta y)\,dx - \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx =$$

$$= \int_{a(y)+\Delta a}^{b(y)+\Delta b} f(x, y+\Delta y)\,dx - \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx =$$

$$= \int_{a(y)}^{b(y)} [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]\,dx + \int_{b(y)}^{b(y)+\Delta b} f(x, y+\Delta y)\,dx -$$

$$- \int_{a(y)}^{a(y)+\Delta a} f(x, y+\Delta y)\,dx.$$

În ipotezele teoremei, putem aplica formula Lagrange diferenţei $f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$, vezi § 2.6

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = \Delta y f'_y(x, y+\theta_1 \Delta y), \qquad 0 < \theta_1 < 1.$$

De asemenea, considerînd o primitivă $\Phi = \Phi(x, y+\Delta y)$ a funcţiei $f(x, y+\Delta y)$ avem $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = f(x, y+\Delta y)$ şi putem scrie egalităţile

$$\int_{b(y)}^{b(y)+\Delta b} f(x, y+\Delta y)\,dx = \Phi(x, y+\Delta y)\Big|_{b(y)}^{b(y)+\Delta b} =$$

$$= \Phi(b(y)+\Delta b, y+\Delta y) - \Phi(b(y), y+\Delta y) =$$

$$= \Delta b \Phi'_x(b(y)+\theta_2 \Delta b, y+\Delta y) =$$

$$= \Delta b f(b(y)+\theta_2 \Delta b, y+\Delta y), \qquad 0 < \theta_2 < 1$$

şi

$$\int_{a(y)}^{a(y)+\Delta a} f(x, y+\Delta y)\,dx = \Phi(x, y+\Delta y)\Big|_{a(y)}^{a(y)+\Delta a} =$$

$$= \Phi(a(y)+\Delta a, y+\Delta y) - \Phi(a(y), y+\Delta y) =$$

$$= \Delta a \Phi'_x(a(y)+\theta_3 \Delta a, y+\Delta y) =$$

$$= \Delta a f(a(y)+\theta_3 \Delta a, y+\Delta y), \quad 0 < \theta_3 < 1.$$

Cu egalităţile deduse rezultă

$$\frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y} = \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y+\theta_1 \Delta y)\,dx +$$

$$+ \frac{\Delta b}{\Delta y} f(b(y)+\theta_2 \Delta b, y+\Delta y) - \frac{\Delta a}{\Delta y} f[a(y)+\theta_3 \Delta a, y+\Delta y).$$

Avînd în vedere continuitatea funcțiilor $a(y)$ și $b(y)$, rezultă că $\Delta a \to 0$ și $\Delta b \to 0$ cînd $\Delta y \to 0$ și cum $f(x, y)$ și $f'_y(x, y)$ sînt continue, iar funcțiile $a(y)$ și $b(y)$ derivabile, trecem la limită sub semnul integral și obținem

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y} = \int_{a(y)}^{b(y)} \lim_{\Delta y \to 0} f'_y(x,\ y+\theta_1 \Delta y)\, dx +$$

$$+ \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta b}{\Delta y} f(b(y)+\theta_2 \Delta b,\ y+\Delta y) - \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta a}{\Delta y} f(a(y)+\theta_3 \Delta a,\ y+\Delta y).$$

Rezultă că există

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y} = F'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,\ y)\, dx +$$

$$+ b'(y) f(b(y),\ y) - a'(y) f(a(y),\ y)$$

și teorema e demonstrată.

Dacă $a(y)=a$, $b(y)=b$ sînt constante, deducem

$$F'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x,\ y)\, dx = \int_a^b f'_y(x,\ y)\, dy$$

formula de derivare sub semnul integral.

Aplicație. Știind că

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}, \quad a>b>0,$$

să se calculeze

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2}.$$

Considerînd în integrala I_1 pe a ca parametru, rezultă $I_1 = I_1(a)$ și calculînd derivata $\frac{dI_1(a)}{da}$, obținem

$$I_2 = -\frac{dI_1(a)}{da} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{d}{da}\left(\frac{-2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) = 2\pi a (a^2-b^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Observăm că prin derivări succesive a integralei $I_1 = I_1(a)$, în raport cu parametrul a, se pot obține valorile integralelor

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^n}, \qquad n = 2,\ 3,\ \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

3.15. INTEGRALE MULTIPLE

3.15.1. INTEGRALA DUBLĂ – DEFINIȚII, PROPRIETĂȚI

Considerăm funcția $f(x, y)$ mărginită pe domeniul plan D, a cărui frontieră e o curbă închisă (Γ), formată dintr-un număr finit de arce netede — arce ale căror ecuații (parametrice) sînt exprimate de funcții continue, cu derivate de ordinul întîi continue pe domeniul de definiție D, conținut în intervalul

$$I=\{(x,\ y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}.$$

Fie

$$(d)\quad a=x_0<x_1<\ \ldots\ <x_n=b$$

$$(d')\quad c=y_0<y_1<\ \ldots\ <y_m=d,$$

două diviziuni, ale intervalelor $[a, b]$ și $[c, d]$; paralelele $x=x_i$, $y=y_j$, la axele de coordonate duse prin punctele celor două diviziuni, fig. 3.11, impart intervalul I în subintervalele

$$I_{ij}=\{(x,\ y)\mid x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1},\ y_j\leqslant y\leqslant y_{j+1}\},\qquad \begin{matrix} i=0\div(n-1)\\ j=0\div(m-1).\end{matrix}$$

Vom spune că mulțimea $(\Delta)=\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p\}$ a subintervalelor I_{ij} pentru care $I_{ij}\cap D\neq\emptyset$ este o diviziune (Δ) a domeniului D (ordinea de numerotare a subintervalelor din (Δ) este fără importanță).

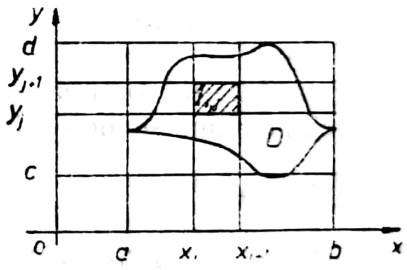


Fig. 3.11.

Definim norma diviziunii (Δ) ca fiind numărul

$$\nu(\Delta)=max\ \{\nu(d), \nu(d')\},$$

$\nu(d)$ și $\nu(d')$ fiind respectiv norma diviziunilor (d) și (d').

Dacă diviziunea (d_1) a intervalului $[a, b]$ e mai fină decît (d), $(d)\subset(d_1)$ și diviziunea (d_1') a intervalului $[c, d]$ e mai fină decît (d'), $(d')\subset(d_1')$, vom spune că diviziunea (Δ_1) a domeniului D, determinată de (d_1) și (d_1') e mai fină decît diviziunea (Δ).

Expresiile

$$s_\Delta=\sum_{i=1}^{p} m_i\,\omega_i,\qquad S_\Delta=\sum_{i=1}^{p} M_i\,\omega_i, \tag{3.98}$$

în care ω_i e aria subintervalului δ_i, $m_i=inf\ f(x, y)$, $M_i=sup\ f(x, y)$, $(x, y)\in\delta_i\cap D$, se numesc respectiv *suma inferioară* și *suma superioară Darboux* ale funcției $f(x, y)$, corespunzătoare diviziunii (Δ), iar expresia

$$\sigma_\Delta=\sum_{i=1}^{p} f(\xi_i, \eta_i)\,\omega_i, \tag{3.99}$$

în care (ξ_i, η_i) e un punct arbitrar din $\delta_i\cap D$ se numește *sumă Riemann* a funcție relativă la diviziunea (Δ).

Scanned with OKEN Scanner

Cum

$$m_i \leqslant f(x, y) \leqslant M_i, \qquad \forall (x, y) \in \delta_i \cap D,$$

rezultă

(3.100) $$s_\Delta \leqslant \sigma_\Delta \leqslant S_\Delta.$$

Dacă $f(x, y) \geqslant 0$, $\forall (x, y)$, sumele din (3.100) exprimă evaluări ale volumului V a cilindrului care are ca baze domeniul plan D și suprafața $z = f(x, y)$ $(x, y) \in D$, iar generatoarele paralele cu axa oz (S_Δ dă o aproximare prin adaos, s_0—prin lipsă), vezi fig. 3.12, astfel că dacă considerăm diviziuni (Δ_n) din ce în ce mai fine, astfel ca $\lim_{n\to\infty} \nu(\Delta_n) \to 0$, sumele s_n, σ_n, S_n, corespunzătoare acestor diviziuni exprimă evaluări din ce în ce mai exacte ale volumului V.

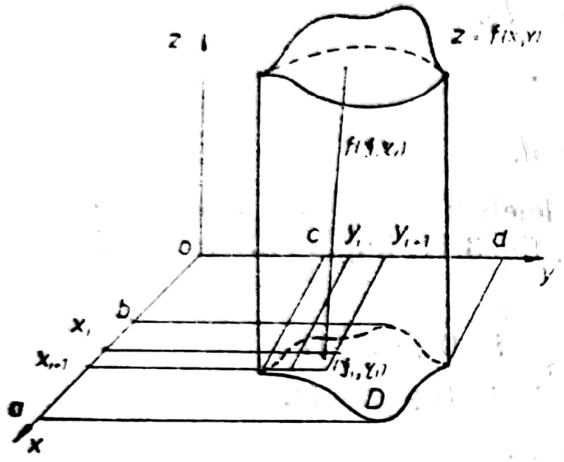


Fig. 3.12.

Dacă în aceste condiții

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

atunci din (3.100) rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

și vom spune că *funcția $f(x, y)$ e integrabilă Riemann pe domeniul D.*

Limita comună a sumelor Darboux și Riemann reprezintă volumul V al cilindrului, se notează

(3.101) $$\iint_D f(x, y)\, dxdy$$

și se numește *integrala dublă a funcției $f(x, y)$ relativă la domeniul D*, și se citește „integrală dublă pe domeniul D din $f(x, y)$". Vom spune că D e *domeniul de integrare*, iar $dxdy$ *elementul de arie*.

Considerațiile făcute în cazul integralei definite (numită și integrală simplă) pot fi făcute și în cazul integralei duble. Astfel, se demonstrează analog pentru integrala dublă proprietățile sumelor Darboux, prezentate în § 1.2.

De asemenea se definește integrabilitatea funcției $f(x, y)$ ca în cazul integralei simple:

Definiția 1°. Spunem că funcția $f(x, y)$, mărginită pe domeniul plan D, închis și mărginit e integrabilă pe D, dacă pentru orice șir de diviziuni (Δ_n) a domeniului D cu norma $\nu(\Delta_n) \to 0$ cînd $n \to \infty$, șirurile (s_n) și (S_n) ale sumelor Darboux au limită comună, V.

Definiția 2°. Spunem că funcția $f(x, y)$, mărginită pe domeniul plan D, închis și mărginit, e integrabilă pe D, dacă pentru orice șir de diviziuni (Δ_n) a domeniului D, cu norma $\nu(\Delta_n) \to 0$, cînd $n \to \infty$ și pentru orice alegere a punctelor $(\xi_i, \eta_i) \in \delta_i \cap D$, $\delta_i \in (\Delta_n)$, șirurile (σ_n) ale sumelor Riemann corespunzătoare au limită comună, V.

Ca și în cazul integralei simple se deduc următoarele criterii de integrabilitate :

Criteriul 1 (al lui Darboux). *O condiție necesară și suficientă ca funcția $f(x, y)$, mărginită pe domeniul plan D, închis și mărginit, să fie integrabilă pe D este ca oricare ar fi $\varepsilon>0$, există un număr $\delta(\varepsilon)>0$, astfel ca, pentru orice diviziune (Δ) a domeniului D cu $\nu(\Delta)<\delta(\varepsilon)$, $S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$.*

Criteriul 2. *Funcția $f(x, y)$, mărginită pe domeniul plan D, închis și mărginit, este integrabilă pe D dacă și numai dacă pentru orice număr $\varepsilon>0$, există un număr $\delta(\varepsilon)$ și un număr V astfel ca, oricare ar fi diviziunea (Δ) a domeniului D, cu $\nu(\Delta)<\delta(\varepsilon)$ și oricare ar fi punctele $(\zeta_i, \eta_i) \in \delta_i \cap D$, $\delta_i \in (\Delta)$, avem $|\sigma_\Delta - V| < \varepsilon$.*

Rezultă de asemenea că o funcție continuă pe un domeniu D, închis și mărginit, e integrabilă pe D, că clasa funcțiilor integrabile este mai largă decît cea a funcțiilor continue.

Se arată că, dacă mulțimea punctelor de discontinuitate ale unei funcții definite pe domeniul D, închis și mărginit, e formată dintr-un număr finit de arce netede, funcția e integrabilă pe domeniul D.

Se stabilesc, ca și în cazul integralelor simple, următoarele proprietăți ale integralei duble :

1^0. Dacă $f(x, y)$ e integrabilă pe D și $f(x, y) \geqslant 0 \quad \forall (x, y) \in D$,

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy \geqslant 0.$$

2^0. Dacă funcțiile f și g sînt integrabile pe D și $f(x, y) \geqslant g(x, y) \; \forall (x, y) \in D$,

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy \geqslant \iint_D g(x, y)\, dxdy.$$

3^0. Dacă funcțiile f și g sînt integrabile pe D, funcția $f+g$ e integrabilă pe D și

$$\iint_D [f(x, y)+g(x, y)]\, dxdy = \iint_D f(x, y)\, dxdy + \iint_D g(x, y)\, dxdy.$$

Prin inducție se arată că această proprietate e adevărată și în cazul a n funcții.

4^0. Dacă funcția f e integrabilă pe D, atunci și funcția λf e integrabilă pe D și

$$\iint_D \lambda f(x, y)\, dxdy = \lambda \iint_D f(x, y)\, dxdy.$$

5^0. Dacă funcția f e integrabilă pe domeniul D, ea e integrabilă și pe subdomeniile D_1 și D_2 în care e împărțit domeniul D de o curbă (C) de arie nulă, fig. 3.13, și

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)\, dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)\, dxdy.$$

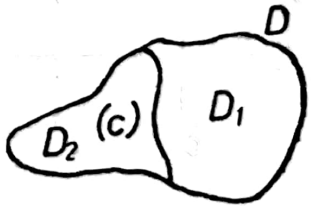


Fig. 3.13.

Scanned with OKEN Scanner

6^0. Dacă funcția f e integrabilă pe D, atunci și funcția $|f|$ e integrabilă pe D și

$$\iint_D |f(x, y)|\,dxdy \geqslant \left|\iint_D f(x, y)\,dxdy\right|.$$

7^0. Dacă funcția f e mărginită și integrabilă pe D și $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$, $\forall (x, y) \in D$, atunci există un număr $\mu \in [m, M]$ astfel ca

$$\iint_D f(x, y)\,dx = \mu\Omega,$$

Ω fiind aria domeniului D.

Dacă $f(x, y)$ e continuă pe D, există un punct $(\xi, \eta) \in D$ astfel ca

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \Omega f(\xi, \eta).$$

Egalitățile prin care se exprimă proprietatea 7^0 se numesc *formule de medie.*

3.15.2. CALCULUL INTEGRALELOR DUBLE

Pentru a calcula integrala dublă pe intervalul bidimensional $I = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$, folosim următoarea

Teoremă. *Dacă $f(x, y)$ e mărginită și integrabilă pe I și dacă:*

1^0. *pentru orice $x \in [a, b]$ există integrala* $F(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy$,

2^0. *$F(x)$ e integrabilă pe $[a, b]$, atunci*

$$\iint_I f(x, y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy\right) dx. \tag{3.102}$$

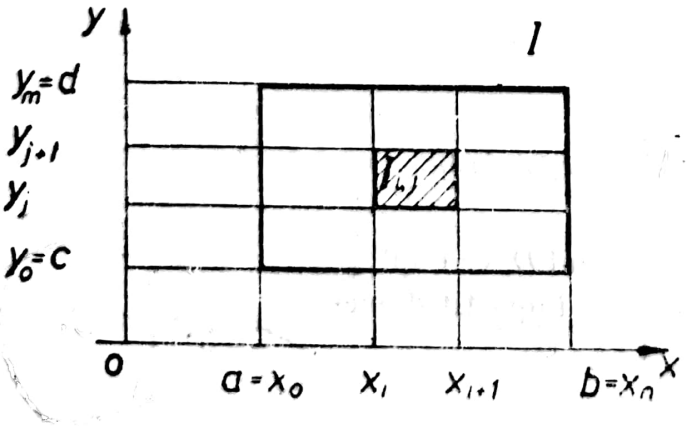


Fig. 3.14.

Considerînd ca în paragraful anterior diviziunea (Δ) a intervalului I, determinată de diviziunile (d) și (d'), respectiv ale lui $[a, b]$ și $[c, d]$, aria subintervalului I_{ij} este $\omega_{ij} = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$ și cu notațiile introduse, vezi fig. 3.14,

$$s_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}\omega_{ij},$$

$$S_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}\omega_{ij}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Întrucît

$$m_{ij} \leqslant f(x,\ y) \leqslant M_{ij}, \qquad \forall\, (x,\ y) \in I_{ij},$$

socotindu-l pe $x \in [x_i,\ x_{i+1}]$ constant, $f(x,\ y)$ e o funcție de y, integrabilă pe $[c,\ d]$, astfel că, avînd în vedere proprietatea de monotonie a integralei definite, putem scrie inegalitatea

$$m_{ij}\,(y_{j+1}-y_j) \leqslant \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x,\ y)\ dy \leqslant M_{ij}\,(y_{j+1}-y_j),\ j=0 \div (m-1),$$

din care, însumînd după j de la zero la $(m-1)$, deducem

$$(3.103)\quad A_i = \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}\,(y_{j+1}-y_j) \leqslant \int_c^d f(x,\ y)\ dy \leqslant \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}\,(y_{j+1}-y_j) = B_i.$$

Cum $F(x) = \int_c^d f(x, y)\ dy$ e integrabilă pe $[a,\ b]$, deci pe orice interval $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0 \div (n-1)$, din (3.103), aplicînd proprietatea de monotonie a integralei definite, obținem

$$A_i\,(x_{i+1}-x_i) \leqslant \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_c^d f(x,\ y)\ dy \right) dx \leqslant B_i\,(x_{i+1}-x_i),$$

astfel că, însumînd după i de la zero la $(n-1)$ rezultă

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}\,(y_{j+1}-y_j)\,(x_{i+1}-x_i) \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \left(\int_c^d f(x,\ y)\ dy \right) dx \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}\,(y_{j+1}-y_j)\ \ (x_{i+1}-x_i)$$

sau

$$s_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}\,\omega_{ij} \leqslant \int_a^b \left[\int_c^d f(x,\ y)\ dy \right] dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}\,\omega_{ij} = S_\Delta.$$

Considerînd un șir de diviziuni (Δ_n) astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} \nu\,(\Delta_n) \to 0$, sumele Darboux s_n și S_n corespunzătoare satisfac inegalitatea

$$s_n \leqslant \int_a^b \left| \int_c^d f(x,\ y)\ dy \right| dx \leqslant S_n,$$

din care, dată fiind integrabilitatea funcției $f(x,\ y)$ pe I, deducem

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \iint_I f(x,\ y)\ dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,\ y)\ dy \right] dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

La fel se arată că dacă funcția $f(x, y)$ e integrabilă pe I și pentru orice $y \in [c, d]$ există integrala $F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$, iar $F(y)$ e integrabilă pe $[c, d]$, atunci avem

$$\iint_I f(x, y)\, dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy. \tag{3.104}$$

Egalitățile (3.102) și (3.104), în mod obișnuit, se scriu respectiv sub forma

$$\iint_I f(x, y)\, dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy \tag{3.105}$$

$$\iint_I f(x, y)\, dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx \tag{3.106}$$

și sînt formulele de calcul a integralelor duble pe un domeniu de integrare particular — dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate.

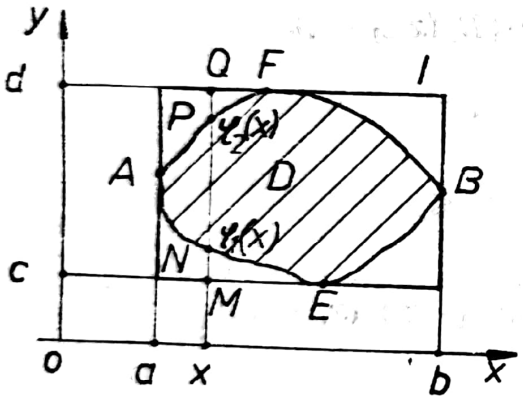


Fig. 3.15.

Să considerăm acum cazul în care domeniul de integrare D nu are forma particulară de dreptunghi : el e mărginit de o curbă închisă (Γ), formată dintr-un număr finit de arce netede. Presupunem că o paralelă la axa oy taie curba (Γ) în cel mult două puncte și că a și b, $a<b$, sînt abscisele extreme, iar c și d, $c<d$, ordonatele extreme ale curbei (Γ), vezi fig. 3.15. Rezultă că domeniul D e conținut în intervalul

$$I = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$$

și considerînd $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x \in [a, b]$, respectiv ecuația arcului AEB și a arcului AFB, pentru calculul integralei duble a funcției $f(x, y)$ pe domeniul D, folosim următoarea :

Teoremă. *Dacă $f(x, y)$ e mărginită și integrabilă pe domeniul D și dacă :*

1°. *pentru orice $x \in [a, b]$ există integrala $F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy$,*

2°. *$F(x)$ e integrabilă pe $[a, b]$, atunci*

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx. \tag{3.107}$$

În ipotezele făcute, putem aplica funcției

$$f(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \in I \setminus D, \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

proprietatea de aditivitate a integralei duble și, avînd în vedere că $\tilde{f}(x, y)=0$ dacă $(x, y)\in I\setminus D$, $\tilde{f}(x, y)=f(x, y)$ dacă $(x, y)\in D$, obținem

$$\iint_I \tilde{f}(x, y)\,dxdy = \iint_D \tilde{f}(x, y)\,dxdy + \iint_{I\setminus D} \tilde{f}(x, y)\,dxdy = \iint_D f(x, y)\,dxdy.$$

Rezultă

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \iint_I \tilde{f}(x, y)\,dxdy = \int_a^b \left|\int_c^d \tilde{f}(x, y)\,dy\right| dx$$

și cum

$$\int_c^d \tilde{f}(x, y)\,dy = \int_c^{\varphi_1(x)} \tilde{f}(x, y)\,dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \tilde{f}(x, y)\,dy + \int_{\varphi_2(x)}^d \tilde{f}(x, y)\,dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy,$$

deducem că

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_a^b \left|\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right| dx.$$

Observații. 1°. Dacă o paralelă la axa ox taie curba (Γ) în maximum două puncte și condițiile similare din teoremă sînt îndeplinite, ecuațiile arcelor EAF și EBF fiind respectiv $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$, $y\in[c, d]$, atunci avem

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx\right] dy. \tag{3.108}$$

2°. Egalitățile (3.107) și (3.108) sînt formulele de calcul a integralei duble și în mod obișnuit se scriu sub forma

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \tag{3.109}$$

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx, \tag{3.110}$$

în care membrul drept se calculează considerînd în integralele

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy, \qquad \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx$$

respectiv pe x și y constanți.

3°. Dacă nu e îndeplinită condiția ca o paralelă la una din axele de coordonate să taie curba (Γ) în maximum două puncte,

Scanned with OKEN Scanner

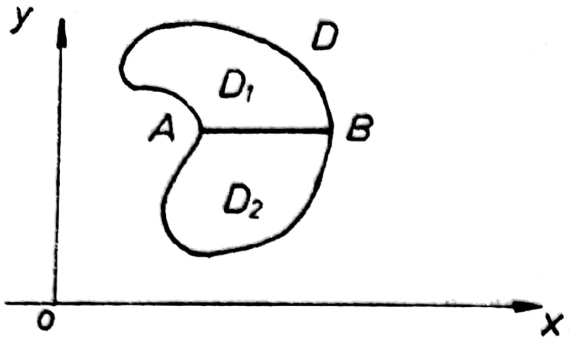


Fig. 3.16.

se împarte domeniul D în subdomenii prin arce de curbă de arie nulă, astfel ca subdomeniile obținute să satisfacă acest deziderat și se aplică proprietatea de aditivitate a integralei față de domeniul de integrare. Astfel, în cazul domeniului D din fig. 3.16, pentru a aplica formula (3.109), considerăm

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x, y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Observăm însă că folosind formula (3.110) nu mai e necesară împărțirea domeniului D în subdomeniile D_1 și D_2.

4^0. Formulele (3.105) și (3.106) sînt un caz particular al formulelor (3.109) și (3.110), cazul în care $\varphi_1(x)=c$, $\varphi_2(x)=d$, respectiv $\psi_1(y)=a$, $\psi_2(y)=b$.

Aplicație. Să se calculeze integrala

$$I=\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy,$$

unde D este domeniul mărginit D de dreptele $x=2$, $y=x$ și hiperbola $xy=1$.

Rezolvare. Domeniul D e triunghiul curbiliniu ABC (fig. 3.17), curba inferioară a conturului (Γ) fiind arcul de parabolă $y=\varphi_1(x)=\frac{1}{x}$, iar curba superioară segmentul de dreaptă $y=\varphi_2(x)=x$, $x\in[1, 2]$. Folosind formula (3.109) avem

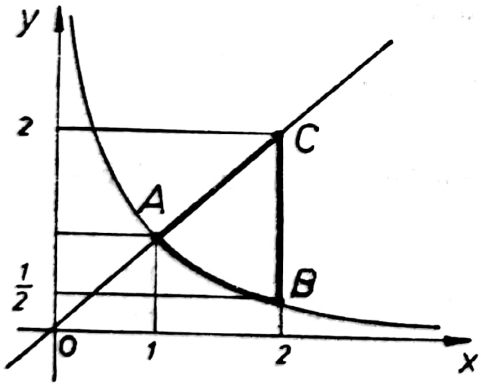


Fig. 3.17.

$$I=\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}\,dy.$$

Cum

$$\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}\,dy=-\frac{x^2}{y}\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}=x^3-x,$$

rezultă

$$I=\int_1^2 (x^3-x)\,dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=\frac{9}{4}.$$

Pentru a aplica formula (3.110) trebuie să observăm că, curba inferioară $x=\psi_1(y)$ este

$$x=\psi_1(y)=\begin{cases}\frac{1}{y}, & \frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1\\ y, & 1\leqslant y\leqslant 2,\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar curba superioară $x=\psi_2(y)=2$ și

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{2} dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{x^2}{y^2}\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{\frac{1}{y}}^{2} \frac{x^2}{y^2}\,dx+\int_{1}^{2} dy \int_{y}^{2} \frac{x^2}{y^2}\,dx.$$

Cum

$$\int_{\frac{1}{y}}^{2} \frac{x^2}{y^2}\,dx=\frac{x^3}{3y^2}\Big|_{\frac{1}{y}}^{2}=\frac{8}{3y^2}-\frac{1}{3y^5},\quad \int_{y}^{2} \frac{x^2}{y^2}\,dx=\frac{8}{3y^2}-\frac{y}{3},$$

avem

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{8}{3y^2}-\frac{1}{3y^5}\right)dy+\int_{1}^{2}\left(\frac{8}{3y^2}-\frac{y}{3}\right)dy=\frac{17}{12}+\frac{5}{6}=\frac{9}{4}.$$

Observăm deci că în calculul integralei duble, în acest caz, este preferabilă formula (3.109).

3.15.3. INTEGRALA TRIPLĂ – DEFINIȚII, PROPRIETĂȚI, CALCUL

Considerațiile făcute referitoare la integrala dublă se reiau analog și în cazul funcției de trei variabile $f(x, y, z)$, domeniul de integrare fiind un domeniu spațial V al cărui frontieră e suprafață închisă S, formată dintr-un număr finit de părți netede.

Intervalul I în care e conținut domeniul V, de această dată, e un paralelipiped (interval închis, tridimensional)

$$I=\{(x, y, z) \mid a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d,\ e\leqslant z\leqslant g\},$$

iar diviziunea lui V va fi obținută făcînd diviziunile (d), (d') și (d'') ale intervalelor $[a, b]$, $[c, d]$ și $[e, g]$, de pe axele ox, oy și oz și ducînd prin punctele diviziunilor plane perpendiculare pe aceste axe. Intervalul I va fi astfel împărțit în subintervalele I_{ijk}, paralelipipede cu fețele paralele cu planele de coordonate.

Mulțimea subintervalelor I_{ijk} cu proprietatea $I_{ijk}\cap V\neq\varnothing$ se notează cu $(\Delta)=\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p\}$ și se numește *diviziune a domeniului* V (ordinea de numerotare a subintervalelor e indiferentă).

Norma diviziunii (Δ) este $\nu(\Delta)=max\{\nu(d), \nu(d'), \nu(d'')\}$.

Dacă diviziunile (d_1), (d_1'), (d_1'') ale intervalelor $[a, b]$, $[c, d]$, $[e, g]$ sînt mai fine decît diviziunile (d), (d'), (d''), adică $(d)\subset(d_1)$, $(d')\subset(d_1')$, $(d'')\subset(d_1'')$, vom spune că diviziunea (Δ') corespunzătoare va fi mai fină decît diviziunea (Δ) și vom nota $(\Delta)\subset(\Delta')$. Evident că $\nu(\Delta')\leqslant\nu(\Delta)$. Se poate deci considera un șir de diviziuni (Δ_n) din ce în ce mai fine, astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty}\nu(\Delta_n)=0$.

Expresiile

$$s_\Delta=\sum_{i=1}^{p} m_i\omega_i,\quad S_\Delta=\sum_{i=1}^{p} M_i\omega_i,$$

în care ω_i e volumul subintervalului δ_i, $m_i = inf\ f(x, y, z)$, $M_i = sup\ f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \delta_i \cap V$, $\delta_i \in (\Delta)$, sînt respectiv *suma inferioară* și *suma superioară Darboux* a funcției $f(x, y, z)$ corespunzătoare diviziunii (Δ), iar expresia

$$\sigma_\Delta = \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \omega_i,$$

în care (ξ_i, η_i, ζ_i) e un punct arbitrar din $\delta_i \cap V$ e *sumă Riemann* a funcției, relativă la diviziunea (Δ).

Cum

$$m_i \leqslant f(x, y, z) \leqslant M_i, \quad \forall\, (x, y, z) \in \delta_i \cap V,$$

rezultă că

$$s_\Delta \leqslant \sigma_\Delta \leqslant S_\Delta.$$

Considerînd un șir de diviziuni (Δ_n) astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(\Delta_n) = 0$ și s_n, S_n, σ_n, sumele Darboux și o sumă Riemann corespunzătoare, dacă

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

atunci și

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

iar *funcția $f(x, y, z)$ e integrabilă Riemann pe domeniul V*; limita comună a acestor sume se notează

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx dy dz$$

și se numește *integrala triplă a funcției $f(x, y, z)$ relativă la domeniul V*.

Din cele prezentate rezultă că toate considerațiile făcute în cazul integralei duble se pot relua analog în cazul integralei triple; rezultatele prezentate referitoare la integrala dublă privind integrabilitatea funcțiilor, proprietățile sumelor Darboux și Riemann sînt valabile și în cazul integralei triple. De asemenea, proprietățile și teoremele legate de calculul integralelor duble se pot formula și în cazul integralelor triple, demonstrațiile acestora fiind analoage.

De aceea, doar enunțăm următoarele teoreme, care exprimă metoda de calcul a integralelor triple:

Teorema 1. *Dacă $f(x, y, z)$ e mărginită și integrabilă pe $I = \{(x, y, z) \mid x \in [a, b], y \in [c, d], z \in [e, g]\}$ și dacă:*

α) pentru orice $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ există integrala

$$F(x, y) = \int_e^g f(x, y, z)\, dz,$$

β) funcția $F(x, y)$ e integrabilă pe $D = [a, b] \times [c, d]$, atunci

$$\iiint_I f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left[\int_e^g f(x, y, z)\, dz\right] dx\, dy. \tag{3.111}$$

în care ω_i e volumul subintervalului δ_i, $m_i = inf\ f(x, y, z)$, $M_i = sup\ f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \delta_i \cap V$, $\delta_i \in (\Delta)$, sînt respectiv *suma inferioară* și *suma superioară Darboux* a funcției $f(x, y, z)$ corespunzătoare diviziunii (Δ), iar expresia

$$\sigma_\Delta = \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \omega_i,$$

în care (ξ_i, η_i, ζ_i) e un punct arbitrar din $\delta_i \cap V$ e *sumă Riemann* a funcției, relativă la diviziunea (Δ).

Cum

$$m_i \leqslant f(x, y, z) \leqslant M_i, \quad \forall\, (x, y, z) \in \delta_i \cap V,$$

rezultă că

$$s_\Delta \leqslant \sigma_\Delta \leqslant S_\Delta.$$

Considerînd un șir de diviziuni (Δ_n) astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(\Delta_n) = 0$ și s_n, S_n, σ_n, sumele Darboux și o sumă Riemann corespunzătoare, dacă

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

atunci și

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

iar *funcția $f(x, y, z)$ e integrabilă Riemann pe domeniul V*; limita comună a acestor sume se notează

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx dy dz$$

și se numește *integrala triplă a funcției $f(x, y, z)$ relativă la domeniul V*.

Din cele prezentate rezultă că toate considerațiile făcute în cazul integralei duble se pot relua analog în cazul integralei triple; rezultatele prezentate referitoare la integrala dublă privind integrabilitatea funcțiilor, proprietățile sumelor Darboux și Riemann sînt valabile și în cazul integralei triple. De asemenea, proprietățile și teoremele legate de calculul integralelor duble se pot formula și în cazul integralelor triple, demonstrațiile acestora fiind analoage.

De aceea, doar enunțăm următoarele teoreme, care exprimă metoda de calcul a integralelor triple:

Teorema 1. *Dacă $f(x, y, z)$ e mărginită și integrabilă pe $I = \{(x, y, z) \mid x \in [a, b], y \in [c, d], z \in [e, g]\}$ și dacă:*

α) pentru orice $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ există integrala

$$F(x, y) = \int_e^g f(x, y, z)\, dz,$$

β) funcția $F(x, y)$ e integrabilă pe $D = [a, b] \times [c, d]$, atunci

$$\iiint_I f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left[\int_e^g f(x, y, z)\, dz\right] dx\, dy. \tag{3.111}$$

Scanned with OKEN Scanner

Observaţie. Formula (3.111) se scrie în mod obişnuit sub forma

$$\iiint_I f(x, y, z)\, dx dy dz = \iint_D dx dy \int_e^g f(x, y, z)\, dz. \tag{3.112}$$

Integrala dublă se exprimă cu ajutorul a două integrale simple, încît (3.112) devine

$$\iiint_I f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g f(x, y, z)\, dz. \tag{3.113}$$

Dacă $f(x, y, z)$ e continuă pe I, condiţiile din teoremă sînt îndeplinite pentru ca ordinea de integrare în (3.113) să fie indiferentă. Se pot scrie astfel $3! = 6$ formule de integrare de forma (3.113).

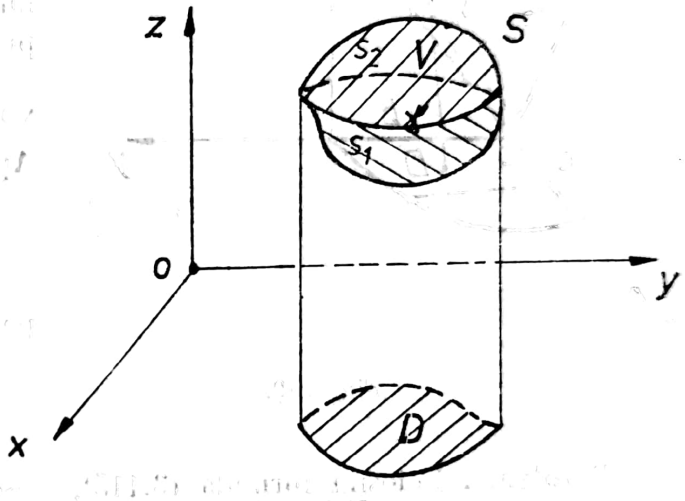


Fig. 3.18.

Considerăm un volum V închis şi mărginit de o suprafaţă S, cu proprietatea că o paralelă la axa oz taie suprafaţa S în cel mult două puncte. Proiectînd domeniul V pe planul xoy obţinem domeniul D şi curba (γ) de tangenţă a cilindrului cu suprafaţa S, curbă care împarte suprafaţa S în suprafeţele S_1 şi S_2 de ecuaţii $z = \psi_1(x, y)$, $z = \psi_2(x, y)$, $(x, y) \in D$, fig. 3.18.

Cu aceste consideraţii formulăm:

Teorema 2. *Dacă $f(x, y, z)$ e mărginită şi integrabilă pe domeniul V şi dacă:*

α) pentru orice $(x, y) \in D$ există integrala $F(x, y) = \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz$,

β) funcţia $F(x, y)$ e integrabilă pe D, atunci

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left[\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\right] dx\, dy. \tag{3.114}$$

Observaţii. Egalitatea (3.114) e formula de calcul a integralei triple şi în mod obişnuit se scrie sub forma

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_D dx dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz. \tag{3.115}$$

Membrul drept din (3.115) se calculează considerînd în integrala simplă pe x și y constanți, iar calculul integralei triple se reduce la calculul unei integrale simple și a unei integrale duble.

Dacă nu e îndeplinită condiția ca o paralelă la axa oz să taie suprafața S în cel mult două puncte, se împarte volumul V în subvolume, prin suprafețe, astfel ca subvolumele obținute să îndeplinească această condiție. În continuare se calculează integrala triplă utilizînd proprietatea de aditivitate.

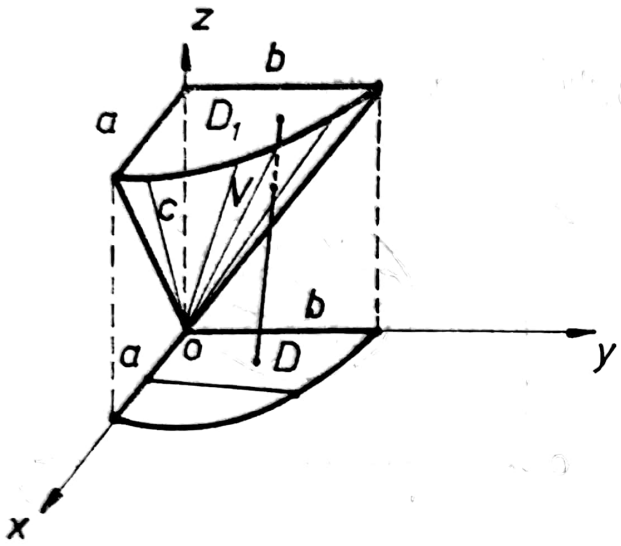


Fig. 3.19.

Dacă funcția $f(x, y, z)$ e continuă, condițiile din teoremă sînt satisfăcute pentru orice variabilă și în (3.115) se poate schimba ordinea de integrare, obținînd astfel încă cinci formule pentru calculul integralei.

Dacă $f(x, y, z)=1$, (3.115) exprimă volumul domeniului V.

Aplicație. Să se calculeze integrala

$$I=\iiint_V \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dxdydz,$$

pe domeniul V mărginit de conul $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\left(\frac{z}{c}\right)^2$, planele de coordonate $x=0$, $y=0$ și planul $z=c$, fig. 3.19.

Rezolvare. Folosim formula (3.115), observăm că suprafețele care limitează domeniul V au ecuațiile: cea inferioară $z=c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}$, cea superioară $z=c$. Obținem:

$$I=\iint_D dxdy\int_{c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}}^{c}\frac{xy}{\sqrt{z}}\,dz,$$

D fiind domeniul limitat de elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ și dreptele $x=0$, $y=0$.

Cum

$$\int_{c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}}^{c}\frac{xy}{\sqrt{z}}\,dz=2xy\sqrt{z}\Big|_{c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}}^{c}=2xy\sqrt{c}\left(1-\sqrt[4]{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}\right),$$

rezultă

$$I=\int_0^a dx\int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}2\sqrt{c}\,xy\left(1-\sqrt[4]{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}\right)dy.$$

Scanned with OKEN Scanner

În continuare avem

$$\int_0^b \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\, 2\sqrt{c}\, xy\left(1-\sqrt[4]{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}\right) dy =$$

$$= \sqrt{c}\, x\left(y^2 - \frac{4}{5} b^2 \sqrt[4]{\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]^5}\right)\Bigg|_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} =$$

$$= \frac{b^2\sqrt{c}}{a^2} x\,(a^2-x^2) - \frac{4}{5} b^2 \sqrt{c}\, x\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{5}{2}}\right]$$

și

$$I = \frac{b^2\sqrt{c}}{a^2}\int_0^a x\,(a^2-x^2)\,dx - \frac{4}{5} b^2\sqrt{c}\int_0^a \left(x - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}}\right) dx =$$

$$= \frac{b^2\sqrt{c}}{a^2}\left(a^2\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^a - \frac{4b^2}{5}\sqrt{c}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{9}\frac{x^{\frac{9}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{a^2b^2\sqrt{c}}{4} - \frac{2a^2b^2\sqrt{c}}{9} = \frac{1}{36} a^2b^2\sqrt{c}.$$

Obținem integrala I cu mai puține calcule dacă proiectăm domeniul V pe planul *yoz*.

Rezultă domeniul D_1 mărginit de axa *oz* și dreptele $z=c$, $y=\frac{b}{c}z$. Suprafețele care limitează domeniul V au ecuațiile : cea inferioară $x=0$, cea superioară $x=a\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}$, încît

$$I = \iint_{D_1} dydz \int_0^{a\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}} \frac{y}{\sqrt{z}}\, xdx = \iint_{D_1} \frac{a^2}{2}\left(\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\frac{y}{\sqrt{z}}\, dydz =$$

$$= \int_0^c dz \int_0^{\frac{b}{c}z} \frac{a^2}{2\sqrt{z}}\left(\frac{z^2}{c^2}y - \frac{y^3}{b^2}\right) dy = \int_0^c \frac{1}{8}\frac{a^2b^2}{c^2}\, z^{\frac{7}{2}}\, dz = \frac{1}{36} a^2b^2\sqrt{c}.$$

Schimbarea de variabile în integralele multiple ușurează în anumite cazuri calculul acestora, domeniul de integrare sau funcția de sub semnul integral devenind mai simple.

Considerînd transformarea

$$(T) \qquad x=\varphi(u, v, w), \quad y=\psi(u, v, w), \quad z=\chi(u, v, w), \quad (u, v, w) \in V',$$

care aplică biunivoc domeniul V' din spațiul (u, v, w) pe domeniul V din spațiul (x, y, z), funcțiile φ, ψ, χ avînd derivate parțiale de ordinul întîi, continue în V', iar determinantul funcțional $\frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{D(u, v, w)} \neq 0$ pe V', numită *transformare regulată*, schimbarea de variabile în integrala triplă se face avînd în vedere :

Teorema 3. Dacă funcția $f(x, y, z)$ e continuă pe V, iar (T) este o transformare regulată a lui V pe V', atunci

$$(3.116) \qquad \iiint_V f(x, y, z)\, dx dy dz =$$

$$= \iiint_{V'} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) \left| \frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{D(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw.$$

Se enunță analog teorema de schimbare de variabile în integrala dublă, conform căreia avem

$$(3.117) \qquad \iint_D f(x, y)\, dx dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| du dv.$$

Exemplu. În cazul integralei

$$I = \iiint_V xyz\, dx dy dz, \quad V = \{(x, y, z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant r^2, \ x, y, z \geqslant 0\},$$

cu transformarea $x=\rho \sin\theta \cos\varphi$, $y=\rho \sin\theta \sin\varphi$, $z=\rho \cos\theta$, în care : ρ, θ și φ sînt *coordonatele sferice* ale punctului $P(x, y, z)$: $\rho=OP$, $\theta=\sphericalangle(Oz, OP)$, $\varphi=\sphericalangle(Ox, OP')$, ($P'$ — proiecția lui P pe planul xOy), octantul sferic V se transformă în paralelipipedul $V'=\left\{(\rho, \theta, \varphi) \mid \rho \in [0, r], \ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$

Scanned with OKEN Scanner

şi cum

$$\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta \\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta,$$

cu (3.116) obţinem

$$I = \iiint_V \rho^5 \sin\varphi\cos\varphi\sin^3\theta\cos\theta\ d\rho\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^r \rho^5\,d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{r^6}{48}.$$

IV. PROGRAMAREA LINIARĂ

1. MODELE ALE PROBLEMEI DE PROGRAMARE LINIARĂ

§ 1.1. PROGRAMARE MATEMATICĂ

1. Printr-o problemă de programare matematică înțelegem determinarea valorii maxime sau minime ale unei funcții de mai multe variabile (funcție vectorială), dacă variabilele sînt supuse unor legături exprimate prin ecuații și inecuații și unor condiții de semn.

În general, o problemă de programare matematică se poate enunța astfel: să se minimizeze sau să se maximizeze o funcție

$$z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1.1}$$

dacă

$$\begin{aligned} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\geqslant d_i, \quad i=1\div p \\ f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\leqslant d_j, \quad j=1\div q \\ f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= d_k, \quad k=1\div r \end{aligned} \tag{1.2}$$

și

$$x_a \geqslant 0,\ a=1\div u;\quad x_b \leqslant 0,\ b=1\div v;\quad x_c \text{ oarecare},\ c=1\div w, \tag{1.3}$$

unde $u+v+w=n$.

Condițiile (1.2) se numesc restricțiile problemei, iar $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T$ care verifică sistemul de restricții se numește *soluție* sau *soluție posibilă* a problemei de programare matematică. Soluția $\bar{X}$ care satisface și condițiile de semn (1.3) impuse variabilelor se numește *program* sau *soluție admisibilă*. Programul pentru care se realizează extremul solicitat al funcției $f(\bar{X})$ se numește *program optim* al problemei.

Scanned with OKEN Scanner

Condițiile (1.3) se pot înlocui cu condiția ca toate variabilele să fie nenegative. Dacă $x_b \leqslant 0$ din

$$x_b = -x_b^1 \Rightarrow x_b^1 \geqslant 0, \tag{1.4}$$

iar dacă x_c este oarecare, nesupusă unei restricții de semn aplicăm substituția

$$x_c = x_c^1 - x_c^2, \quad x_c^1 \geqslant 0, \; x_c^2 \geqslant 0 \tag{1.5}$$

și

$$x_c^1 > x_c^2 \Rightarrow x_c > 0, \quad x_c^1 = x_c^2 \Rightarrow x_c = 0, \quad x_c^1 < x_c^2 \Rightarrow x_c < 0.$$

Înlocuim (1.4) și (1.5) în funcția f și în restricții. A doua transformare mărește numărul necunoscutelor, în cazul nostru de la n la $n+w$.

Restricțiile problemei de programare se pot exprima numai prin inecuații de același sens sau numai prin ecuații.

Pentru a transforma toate restricțiile (1.2) în inecuații de același sens înmulțim cu -1 inecuațiile care nu corespund ca sens și o ecuație $f_k = 0$ o înlocuim cu două inecuații $f_k \leqslant 0$, $f_k \geqslant 0$ și înmulțim cu -1 una din ele. Cu $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ problema poate fi adusă la una din formele

$$\begin{array}{l} min\ f(X) \\ f_i(X) \geqslant 0, \; i = 1 \div m \\ X \geqslant 0 \end{array} \qquad \text{sau} \qquad \begin{array}{l} max\ f(X) \\ f_i(X) \leqslant 0, \; i = 1 \div m \\ X \geqslant 0 \end{array}$$

În scrierea problemei am renunțat la explicațiile „să se minimizeze sau maximizeze", „dacă" „și", omisiune care nu poate crea confuzii.

Pentru a transforma o inecuație $f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant d_j$ într-o ecuație adunăm în primul membru variabila $x_j^e \geqslant 0$, *variabilă-ecart* sau *variabilă de compensație* și inecuația devine

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) + x_j^e = d_j.$$

Dacă sensul inecuației este „$\leqslant$", scădem o variabilă-ecart pozitivă. Prin introducerea variabilelor ecart numărul necunoscutelor crește, în notația folosită cu $p+q$, iar problema de programare matematică poate fi adusă la forma

$$\begin{array}{l} min\ (max)\ f(X) \\ f_i(X) = d_i, \qquad i = 1 \div m. \\ X \geqslant 0 \end{array}$$

Dacă toate funcțiile care intervin în problema de programare matematică sînt liniare ea se numește *problemă de programare liniară*. Numai acest caz, cu totul particular, formează obiectul preocupărilor din acest prim volum al cărții. În caz contrar, dacă nu toate funcțiile sînt liniare, avem o problemă de *programare neliniară*.

În cadrul capitolului de studiu al funcțiilor de mai multe variabile, am văzut că, matematica clasică posedă metode de determinare a extremelor locale ale

Scanned with OKEN Scanner

unei funcții ale cărei variabile sînt supuse anumitor legături. În cazurile concrete ale problemelor de natură economică metodele clasice devin inaplicabile, chiar și în cazul programării liniare, datorită numărului mare de necunoscute care intervin într-o astfel de problemă, ale condițiilor de nenegativitate, ale dificultăților în utilizarea tehnicii moderne de calcul. Analiza cantitativă a fenomenelor economice, alegerea unei variante optime din mulțimea variantelor posibile este de neconceput fără utilizarea unor metode matematice.

2. Exemple de probleme economice care se transpun în modelul programării liniare

a.) **O problemă de planificare a producției.** O întreprindere produce n sortimente S_j, $j=1\div n$, pentru realizarea cărora dispune de m resurse R_i, $i=1\div m$. Să se organizeze producția întreprinderii dacă se cunosc cantitățile de resurse de care dispune întreprinderea, consumurile specifice și beneficiile unitare.

Notăm : d_i cantitatea de resurse R_i, a_{ij} cantitatea de resurse R_i consumată pentru realizarea unui singur sortiment S_j și c_j beneficiul adus întreprinderii de realizarea unui singur sortiment S_j. Datele problemei sînt cuprinse în tabelul

Resurse \ Sortiment	S_1	S_2	...	S_n	Disponibil
R_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	d_1
R_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	d_2
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
R_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	d_m
Beneficiu	c_1	c_2	...	c_n	

Notăm cu x_j numărul de sortimente S_j pe care le produce întreprinderea. Vectorul $X=(x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)^T$ reprezintă un plan de producție. A organiza producția înseamnă a determina coordonatele $x_j\geqslant 0$ ale vectorului X în condițiile nedepășirii resurselor întreprinderii și a obținerii unui beneficiu maxim.

Presupunînd că beneficiile sînt proporționale cu volumul producției modelul problemei este

$$
\begin{aligned}
&max\ (c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n)\\
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\leqslant d_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\leqslant d_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\leqslant d_m\\
&x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Am renunțat în scrierea modelului la precizările intermediare : „să se determine", „dacă" ele fiind subînțelese.

Scanned with OKEN Scanner

Modelul mai poate fi scris sub forma

$$max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant d_i, \qquad \forall i = 1 \div m$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad \forall j = 1 \div n.$$

Dacă întreprinderea are obligația de a produce cel puțin p sortimente S_k, se adaugă modelului restricția $x_k \geqslant p$, iar dacă desfacerea nu este asigurată decît pentru q sortimente S_k, se adaugă restricția $x_k \leqslant q$.

b.) **Problema nutriției.** O dietă (rația zilnică) trebuie să conțină substanțele nutritive S_i în cantitățile d_i, $i = 1 \div m$, substanțe ce se găsesc în alimentele A_j, $j = 1 \div n$. Fie a_{ij} cantitatea de substanță S_i conținută de alimentul A_j și c_j costul unitar al alimentului A_i. Să determinăm cantitățile de alimente x_j, necesare asigurării nivelului cerut de substanțe S_i, astfel încît costul total al dietei să fie minim.

Modelul problemei este

$$min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = d_i, \quad i = 1 \div m$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad \forall j = 1 \div n.$$

c.) **Problema transporturilor.** Un același produs trebuie distribuit de la m centre de producție (furnizori) la n centre de desfacere (beneficiari). Disponibilul furnizorului F_i este a_i, necesarul beneficiarului B_j este b_j, iar costul unitar de la furnizorul F_i la beneficiarul B_j este c_{ij}. A organiza transportul înseamnă a determina cantitățile de produs ce trebuie transportate de la fiecare furnizor la fiecare beneficiar astfel încît costul total al transportului să fie minim.

Dacă notăm cu x_{ij} cantitatea ce se transportă de la furnizorul F_i la beneficiarul B_j și considerăm că totalul disponibilului este egal cu necesarul beneficiarilor

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

modelul problemei este

$$min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , \qquad i = 1 \div m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , \qquad j = 1 \div m$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad , \qquad \forall \begin{cases} i = 1 \div m \\ j = 1 \div n. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Modelul are o structură deosebită și un număr mare de variabile ($m \times n$). El va face obiectul unui studiu aparte în cadrul programării liniare.

d.) **Problemă de amestec.** Un produs se obține din amestecul a n materii prime M_j. Unitatea de materie primă M_j conține a_{ij} unități de substanță S_i, $i=1 \div m$.

Produsul P trebuie să conțină cel puțin d_h, $h=1 \div p$, unități de substanță S_h și cel mult d_k, $k=(p+1) \div m$, unități de substanță S_k. Costul unitar al materiei prime M_j este c_j. Să se determine cantitățile de materie primă. M_j care trebuie să intre în componența produsului P astfel încît costul lui să fie cît mai mic.

Modelul problemei este

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{hj} x_j \geqslant d_h, \qquad h=1 \div p$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \leqslant d_k, \qquad k=(p+1) \div m$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1 \div n.$$

Observație. Am dat doar cîteva exemple de probleme economice care se transpun într-un model de programare liniară, pornind de la considerentul că, determinarea coeficienților și punerea în model a problemelor formează obiectul disciplinelor economice de profil.

3. Forme fundamentale ale modelului de programare liniară.

O problemă de programare liniară, datorită posibilităților de a transforma inecuațiile în ecuații și condițiile de semn impuse variabilelor în condiții de nenegativitate, se poate aduce la forma

$$\begin{aligned} &\text{optim } (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n) \\ &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = d_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = d_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = d_m \\ &x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

în care toate restricțiile sînt ecuații ; o numim *forma standard* a modelului de programare liniară.

Cu $A=(a_{ij})_{m \times n}$, $C=(c_1c_2 \ldots c_n)^T$, $D=(d_1d_2 \ldots d_m)^T$, $X=(x_1x_2 \ldots \ldots x_n)^T$ forma standard (1.7) devine

$$\begin{aligned} &\text{optim } C^TX \\ &AX=D \\ &X \geqslant 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, orice problemă de programare liniară poate fi adusă la una, oricare, din formele

$$\begin{array}{lll} \min C^T X & & \max C^T X \\ AX \geqslant D & \text{sau} & AX \leqslant D \\ X \geqslant 0 & & X \leqslant 0, \end{array} \tag{1.9}$$

în care restricţiile sînt inecuaţii de sens contrar extremului ($\geqslant$ pentru minim şi $\leqslant$ pentru maxim). Modelele (1.9) reprezintă *formele canonice* ale unei probleme de programare liniară.

Vom folosi în continuare un limbaj rezultat din problema de planificare a producţiei pusă în modelul (1.6).

Funcţia

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = C^T X = C \cdot X \tag{1.10}$$

o numim *funcţie obiectiv* sau funcţie economică.

Spaţiul R^n care conţine ca elemente vectorii X şi C îl numim *spaţiu al activităţilor*. Vectorul D îl numim *vector al resurselor*, iar R^m *spaţiu al resurselor*.

Vectorii coloană ai matricei A îi notăm cu V_j, $j = 1 \div n$. Sistemul de restricţii din forma standard devine

$$x_1 V_1 + x_2 V_2 + \ldots + x_n V_n = D. \tag{1.11}$$

Reamintim că, $\bar{X} = (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n)^T$ este o soluţie a problemei de programare liniară dacă $\bar{X}$ verifică sistemul de restricţii şi program, dacă $\bar{X} \geqslant 0$.

Aplicaţia 1. Să se aducă la forma standard problema

$$\begin{aligned} &\max\ (3x_1 + 2x_2 - x_3) \\ &5x_1 + x_2 - 5x_3 = 1 \\ &4x_1 + x_2 - x_3 \geqslant 4 \\ &x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 2 \\ &x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Prima restricţie fiind egalitate rămîne neschimbată. Din prima parte a celei de a doua scădem variabila ecart $x_2^e \geqslant 0$, iar în a treia adunăm variabila ecart $x_3^e \geqslant 0$. Problema devine

$$\begin{aligned} &\max\ (3x_1 + 2x_2 - x_3) \\ &5x_1 + x_2 - 5x_3 = 1 \\ &4x_1 + x_2 - x_3 - x_2^e = 4 \\ &x_1 - x_2 + x_3 + x_3^e = 2 \\ &x_1, x_2, x_3 \geqslant 0, \quad x_2^e, x_3^e \geqslant 0. \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin aducerea la forma standard s-a mărit numărul necunoscutelor problemei.

Aplicaţia 2. Să se aducă la forma canonică problema

$$\begin{aligned} &max\ (2x_1-x_2+x_3)\\ &2x_1+3x_2-x_3\geqslant 3\\ &x_1+x_2+2x_3=4\\ &x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0. \end{aligned}$$

Prima restricţie o înmulţim cu -1, a doua o înlocuim cu inecuaţiile

$$\begin{aligned} &x_1+x_2+2x_3\leqslant 4\\ &x_1+x_2+2x_3\geqslant 4. \end{aligned}$$

Înmulţim ultima inecuaţie cu -1 şi obţinem forma canonică

$$\begin{aligned} &max\ (2x_1-x_2+x_3)\\ &-2x_1+3x_2+x_3\leqslant -3\\ &x_1+x_2+2x_3\leqslant 4\\ &-x_1+x_2-2x_3\leqslant -4\\ &x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0. \end{aligned}$$

Prin aducerea la forma canonică s-a mărit numărul restricţiilor problemei.

§ 1.2. CLASIFICAREA SOLUŢIILOR. PROPRIETĂŢI

1. Soluţiile unei probleme de programare liniară. Ne vom referi la problema **sub formă standard**

$$\begin{aligned} &optim\ C^TX\\ &AX=D\\ &X\geqslant 0, \end{aligned} \tag{1.12}$$

cu matricea $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $D=(d_1d_2\ \ldots\ d_m)^T$. Presupunem că rang $A=m<n$; sistemul de restricţii este compatibil nedeterminat şi s-au eliminat ecuaţiile secundare.

Notăm cu V_i, $i=1\div n$, vectorii coloană ai matricei A. Ei aparţin spaţiului resurselor R^m şi sistemul de restricţii se poate scrie

$$x_1V_1+x_2V_2+\ldots+x_nV_n=D. \tag{1.13}$$

O soluţie $\bar{X}=(\bar{x}_1\bar{x}_2\ \ldots\ \bar{x}_n)^T$ a problemei (1.12)

$$D=\bar{x}_1V_1+\bar{x}_2V_2+\ldots+\bar{x}_nV_n$$

reprezintă o descompunere a vectorului resurselor D după vectorii V_i, iar un program $\bar{X}\geqslant 0$, o descompunere după aceeaşi vectori cu proiecţiile $\bar{x}_i$ ale lui D pe vectorii V_i nenegative.

Fie B o bază în R^m; notăm prin $i\in B$ faptul că V_i este unul din vectorii bazei B şi fie $\bar{X}^B$ soluţia de bază corespunzătoare bazei B. Avem

$$\bar{x}_i^B=\begin{cases} d_i^B, & \text{dacă } i\in B \\ 0, & \text{dacă } i\notin B. \end{cases}$$

Soluţiile, respectiv programele de bază ale sistemului de restricţii le numim *soluţii de bază* sau *programe de bază* ale problemei de programare (1.12). Dacă $D^B\geqslant 0$, $\bar{X}^B\geqslant 0$; o astfel de bază care conduce la un program o numim *bază admisibilă*. În caz contrar, dacă $\bar{X}^B$ nu este program, zicem că baza B este o *bază posibilă*. În I, § 3.6 am dat o metodă de determinare a programelor de bază ale unui sistem de ecuaţii, deci implicit ale problemei de programare liniară. Ea constă din explorarea bazelor admisibile ale matricei A.

2. Teoreme referitoare la programele unei probleme de programare liniară

Ne vom referi la forma standard (1.12).

a) *Mulţimea programelor unei probleme de programare liniară este convexă.* Dacă $X_1\geqslant 0$ şi $X_2\geqslant 0$ sînt două programe ale problemei (1.12)

$$AX_1=D,\quad AX_2=D$$

şi $\bar{X}=(1-\lambda)\,X_1+\lambda X_2$, $\lambda\in[0,\ 1]$, combinaţia lor convexă

$$1-\lambda\geqslant 0,\ \lambda\geqslant 0\Rightarrow\bar{X}\geqslant 0$$

şi

$$A\bar{X}=A\,[(1-\lambda)\,X_1+\lambda X_2]=AX_1-\lambda\,(AX_1-AX_2)=D.$$

b) *Mulţimea programelor optime ale unei probleme de programare liniară este convexă.* Fie X_1 şi X_2 două programe optime ale problemei (1.12), adică

$$optim\ \ z=C^TX_1=C^TX_2.$$

Rezultă

$$C^T\bar{X}=C^T[(1-\lambda)X_1+\lambda X_2]=C^TX_1=optim\ z$$

și

$$X\geqslant 0 \text{ pentru } \lambda\in[0,\ 1].$$

c) *Dacă o problemă de programare liniară admite un program ea admite cel puțin un program de bază.* Fie $\bar{X}=(\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \ldots\ \bar{x}_n)^T$ un program al problemei (1.12) cu $h\leqslant n$ componente nenule. Vectorii corespunzători coordonatelor nenule formează un sistem V de vectori din R^m, iar

$$\bar{x}_i=\begin{cases}\neq 0, & \text{dacă } i\in V\\ =0, & \text{dacă } i\notin V.\end{cases}$$

Dacă vectorii sistemului V sînt liniar independenți, $\bar{X}$ este un program de bază. În caz contrar există h constante $\bar{y}_i$, $i\in V$, nu toate nule astfel ca $\sum_{i\in V}\bar{y}_iV_i=0$. Considerăm vectorul $Y\in R^n$ cu coordonatele

$$y_i=\begin{cases}\bar{y}_i, & \text{dacă } i\in V\\ 0, & \text{dacă } i\notin V.\end{cases}$$

Rezultă $AY=0$ și $A(\bar{X}+\lambda Y)=D$, adică oricare ar fi λ, $A\bar{X}+\lambda Y$ este o soluție a problemei (1.12). Pentru a obține un program

$$\bar{x}_i+\lambda\bar{y}_i\geqslant 0,\qquad \forall i\in V.$$

Dacă $\bar{y}_i>0$ condiția este îndeplinită $\forall\lambda\geqslant 0$, iar

$$\bar{y}_i<0\Rightarrow\lambda\leqslant\frac{\bar{x}_i}{-\bar{y}_i},\quad \forall i\in V.$$

Dînd lui λ valoarea

$$\lambda_0=\frac{\bar{x}_k}{-\bar{y}_k}=\inf_{\bar{y}_i>0}\left\{\frac{\bar{x}_i}{-\bar{y}_i}\right\} \tag{1.14}$$

$\bar{x}_k+\lambda\bar{y}_k=0$; se obține un nou program $\tilde{X}$ cu $h-1$ componente nenule. Dacă $\tilde{X}$ este un program de bază, teorema este verificată. În caz contrar, aplicăm procedeul în continuare pînă obținem un program de bază sau un program cu o singură coordonată nenulă, program de bază al problemei (1.12).

Dacă indicele k din (1.14) nu este unic determinat se obține un program $\tilde{\tilde{X}}$ cu mai puțin de $n-1$ coordonate nenule.

Exemplu. Pornind de la programul $X=(2\quad 1\quad 2\quad 2)^T$ să se determine un program de bază al sistemului

$$3x_1+2x_2-\ x_3-x_4=4$$
$$x_1+\ x_2+2x_3+x_4=9.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Între vectorii V_1, V_2, V_3, V_4 există relația $2V_1-3V_2+V_3-V_4=0$ și $Y=(2\ -3\ 1\ -1)^T$. Considerăm $\lambda_0=\frac{1}{3}=inf.\left\{\frac{1}{-3},\frac{2}{-1}\right\}$ și obținem un nou program

$$X_1=X+\frac{1}{3}Y=\left(\frac{8}{3}\ \ 0\ \ \frac{7}{3}\ \ \frac{5}{3}\right)^T.$$

Între vectorii V_1, V_3, V_4 există relația liniară $V_1-4V_3+7V_4=0$ și $Y_1=(1\ 0\ -4\ 7)^T$. Singurul raport cu $y_i<0$ este $\frac{7}{12}$ și

$$X_2=X_1+\frac{7}{12}Y_1=\left(\frac{13}{4}\ \ 0\ \ 0\ \ \frac{23}{4}\right)^T.$$

Vectorii V_1 și V_4 sînt liniar independenți și X_2 este un program de bază.

d) *Dacă o problemă de programare liniară admite un program optim ea admite cel puțin un program de bază optim.* Fie X_1 un program optim al problemei (1.12) și $Z(X_1)=C^TX_1$ valoarea optimă a funcției obiectiv.

Dacă X_1 nu este program de bază $\exists Y\in R$ astfel ca $X_2=X_1+\lambda Y$ să fie program și

$$Z(X_2)=C^T(X_1+\lambda Y)=Z(X_1)+\lambda(C^TY)$$

și $C^TY=0$. Într-adevăr, pentru o problemă de minim atribuim lui λ o valoare de semn contrar lui C^TY și $Z(X_2)<Z(X_1)$ adică X_1 nu este program optim; pentru o problemă de maxim atribuim lui λ o valoare de același semn cu C^TY și $Z(X_2)>Z(X_1)$.

Cu $\lambda=\lambda_0$ dat de (1.14) se obține un nou program optim cu cel puțin o coordonată nenulă mai puțin și în final un program de bază optim.

3. **Rezolvarea totală a unei probleme de programare liniară.** Din ultima teoremă rezultă că dacă o problemă de programare are un singur program optim, atunci el este program de bază. Problema (1.12) se poate rezolva determinînd toate programele de bază prin metoda dată în I, § 3.6, înlocuindu-le în funcția obiectiv și reținînd pe cel care minimizează sau maximizează funcția obiectiv. Metoda comportă însă calcule laborioase, ea necesitînd explorarea tuturor bazelor admisibile. Ori o problemă cu m restricții și n necunoscute poate avea C_n^m baze admisibile.

Observație. În explorarea bazelor admisibile folosim rezultatul din I, § 3.6. Dacă $B=(V_1\ldots V_k\ldots V_n)$ este o bază admisibilă, $B_1=(V_1\ldots V_h\ldots V_n)$ este o bază admisibilă numai dacă

$$\frac{d_h^B}{a_{hk}^B}=\inf_{a_{ik}^B>0}\left\{\frac{d_i^B}{a_{ik}}\right\}. \tag{1.15}$$

Aplicație. Să se rezolve

$$max\ z = max\ (x_1 + 2x_2 + x_3)$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 = 2$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0.$$

Soluție. Bazele posibile sînt (V_1, V_2), (V_1, V_3) și (V_2, V_3). Numerotăm tabelele și vom da explicații la sfîrșit.

	B	D	V_1	V_2	V_3	E_1	E_2	
←	E_1	2	$\boxed{3}$	-1	1	1	0	(I)
	E_2	3	2	1	3	0	1	
	V_1	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		0	
←	E_2	$\frac{5}{3}$	0	$\boxed{\frac{5}{3}}$	$\frac{7}{3}$		1	(II)
	V_1	1	1	0	$\frac{4}{5}$			
	V_2	1	0	1	$\frac{7}{5}$			(III)
	V_1	$\frac{3}{7}$	1	$-\frac{4}{7}$	0			
	V_3	$\frac{5}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	1			(IV)

În tabelul (I), $D > 0$, în caz contrar înmulțim cu -1 una sau ambele ecuații. În locul vectorului E_1 nu poate intra în bază decît V_1; V_2 nu poate fi introdus în bază deoarece coordonata sa de pe prima linie este negativă, iar V_3 pentru că $\frac{2}{1} > \frac{3}{3}$.

În tabelul (II), (V_1, V_2) este baza admisibilă, $\frac{5}{3}$ fiind singura coordonată pozitivă a lui V_2; de asemenea (V_1, V_3) este bază admisibilă deoarece $\frac{5}{3} : \frac{7}{3} = \frac{5}{7} < \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2$.

În tabelul (IV), (V_2, V_3) nu este bază admisibilă, coordonata de pe prima linie a lui V_2 fiind negativă.

Programele de bază sînt $X_1 = (1\ 1\ 0)^T$ și $X_2 = \left(\frac{3}{7}\ 0\ \frac{5}{7}\right)^T$. Programul X_1 este optim pentru că $Z(X_1) = 3 > Z(X_2) = \frac{8}{7}$.

Scanned with OKEN Scanner

§ 1.3. INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A PROBLEMELOR DE PROGRAMARE LINIARĂ

Vom trata cazul unor probleme simple care conduc la realizarea unui model geometric intuitiv.

1. **Interpretarea geometrică în spaţiul activităţilor. Metoda grafică.** Considerăm problema de programare liniară în două variabile

$$\begin{aligned} &\text{optim } z = \text{optim } (c_1x_1 + c_2x_2) \\ &a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geqslant d_i\ , \quad i = 1 \div m \\ &x_1 \geqslant 0, \qquad x_2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Fiecare restricţie a problemei determină un semiplan închis în R^2 limitat de dreapta a cărei ecuaţie se obţine schimbînd în restricţie semnul „$\geqslant$" în „$=$". Intersecţia acestor m semiplane determină un *poligon convex* P, mulţimea soluţiilor problemei (1.16) ; coordonatele (sau vectorul său de poziţie) oricărui punct din P reprezintă o soluţie a problemei. Intersecţia lui P cu primul cadran ($x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$) reprezintă un poligon convex π, *mulţimea programelor problemei*.

Funcţia obiectiv determină un fascicul de drepte paralele

$$c_1x_1 + c_2x_2 = \lambda, \qquad \lambda \in R\ . \tag{1.17}$$

Numim dreptele fasciculului *linii de nivel* ; pentru coordonatele punctelor unei linii de nivel funcţia obiectiv are aceeaşi valoare. Linia de nivel d_0 care trece prin origine ($\lambda = 0$) separă planul în două semiplane z^+ şi z^-.

Distanţa de la origine la dreptele (1.17) fiind

$$d = \frac{|\lambda|}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \Rightarrow \frac{|\lambda|}{d} = \text{constant}. \tag{1.18}$$

Dacă $d_0 \cap \pi = \varnothing$, maximul funcţiei obiectiv se obţine pentru linia de nivel cea mai depărtată de origine care are cel puţin un punct comun cu π, iar minimul pentru cea mai apropiată linie de nivel de origine care se bucură de aceeaşi proprietate.

Dacă d_0 separă mulţimea π în două submulţimi, maximul, respectiv minimul se obţine pentru cea mai depărtată linie de nivel din z^+ sau z^-.

Consideraţiile geometrice făcute conduc la o *metodă grafică* de rezolvare a problemelor de programare liniară, în două variabile, cu restricţii sub formă de inecuaţii. Fără a prezenta importanţa practică, metoda înlesneşte însuşirea unui limbaj utilizat în capitolele următoare.

Aplicaţia 1. Să se rezolve problema de programare liniară

$$\begin{aligned} &max\ z = max\ (2x_1 + x_2) \\ &2x_1 - x_2 \geqslant -2 \\ &x_1 - 2x_2 \leqslant 2 \end{aligned}$$

$$x_1 + x_2 \leqslant 5$$

$$x_1,\ x_2 \geqslant 0.$$

Soluție. Construim dreptele

$$d_1\ (x_1,\ x_2) \equiv 2x_1 - x_2 + 2 = 0$$

$$d_2\ (x_1,\ x_2) \equiv x_1 - 2x_2 - 2 = 0$$

$$d_3\ (x_1,\ x_2) \equiv x_1 + x_2 - 5 = 0$$

Coordonatele originii (0, 0) verifică toate cele trei restricții, iar $d_1 \cap d_2 = A_3(-2, -2)$, $d_1 \cap d_3 = A_2$ (1, 4), $d_2 \cap d_3 = A_1$ (4. 1). Coordonatele punctelor (sau vectorii lor de poziție) interioare și de pe conturul triunghiului $A_1A_2A_3$ reprezintă mulțimea M a soluțiilor problemei.

Intersectăm cu primul cadran; mulțimea punctelor interioare și de pe conturul poligonului OBA_1A_2C — cu B (2, 0), C (0, 2) — reprezintă mulțimea programelor problemei.

Liniile de nivel determinate de funcția obiectiv au ecuația $2x_1 + x_2 = \lambda$, iar $z \geqslant 0$, $\forall x_1, x_2 \geqslant 0$. Construim dreapta $d\ (x_1, x_2) \equiv 2x_1 + x_2 - 4 = 0$. Din figura 1.1 se observă că linia de nivel cea mai depărtată de origine, a cărei intersecție cu mulțimea programelor nu este vidă, trece prin A_1. Programul optim este $\bar{X} = (4, 1)^T$, iar maximul funcției obiectiv este egal cu $z\ (\bar{X}) = 9$.

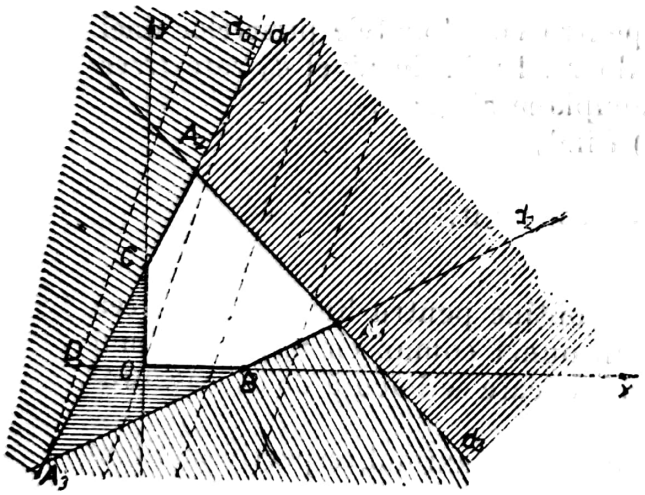


Fig. 1.1.

Observații. Modificăm unele date ale problemei inițiale și rezolvăm problema tot pe fig. 1.1.

a) Să determinăm $max\ (2x_1 + 2x_2)$ păstrînd restricțiile și condițiile de nenegativitate. Liniile de nivel sînt paralele cu dreapta d_3. Programele optime sînt $\bar{X}_1 = (4, 1)^T$, $\bar{X}_2\ (1, 4)^T$ și combinația lor convexă $\bar{X} = (4 - 3\lambda, 1 + 3\lambda)^T$, $\lambda \in [0, 1]$. Dealtfel $\bar{X} \geqslant 0$, $Z\ (\bar{X}) = 10$, $\forall \lambda \in [0, 1]$. Problema *admite o infinitate de programe optime.*

b) Renunțăm la ultima restricție și păstrăm celelalte date ale problemei. În figura 1.1 dispare dreapta d_3. Liniile de nivel oricît de depărtate ar fi de origine păstrează puncte comune cu mulțimea programelor. În programul optim $x_1 \to +\infty$, $x_2 \to +\infty$ și problema admite *un optim infinit.*

c) Adăugăm problemei inițiale restricția

$$x_1 + x_2 \geqslant 6.$$

Intersecția semiplanului determinat de restricție cu mulțimea programelor problemei date este vidă. Problema modificată *nu admite programe.*

Scanned with OKEN Scanner

d) Adăugăm problemei inițiale restricția $x_1 \geqslant 4$. Mulțimea programelor problemei se reduce la punctul A_1 și indiferent de funcția obiectiv și natura extremului, programul optim este $\bar{X}=(4,\ 1)^T$; problema de optimizare devine banală.

Aplicația 2. Să se rezolve problema

$$min\ (3x_1-x_2)$$
$$2x_1-x_2 \geqslant -2$$
$$x_1-2x_2 \leqslant 2$$
$$x_1+x_2 \leqslant 5$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

Soluție. Restricțiile problemei sînt cele din problema anterioară. Mulțimea programelor este dat de OBA_1A_2C. Linia de nivel d_0 (fig. 1.2) separă mulțimea programelor în două submulțimi: A_1, $B \in Z^+$ A_2, $C \in Z^-$. Minimul funcției obiectiv corespunde celei mai depărtate linii de nivel din z^-, linia ce trece prin C (0, 2). Programul optim este $X=(0,\ 2)^T$, iar $min\ z=-2$.

Observație. a. Să determinăm $min\ (2x_1-x_2)$, păstrînd restricțiile. Liniile de nivel sînt paralele cu dreapta d_1, problema admite o infinitate de programe optime, coordonatele punctelor segmentului CA_2.

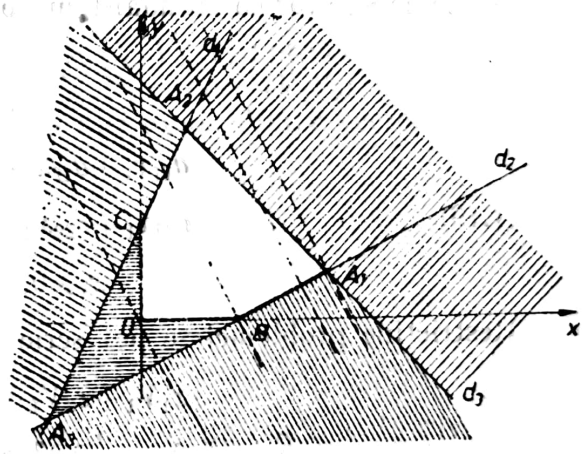


Fig. 1.2.

b. Să determinăm

$$min\ (2x_1-x_2)$$
$$2x_1-x_2 \leqslant -2$$
$$x_1-2x_2 \leqslant 2$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

Renunțînd la ultima restricție, mulțimea programelor devine nemărginită și $x_1 \to +\infty$, $x_2 \to +\infty$, iar problema admite optim finit. Într-adevăr, liniile de nivel sînt paralele cu dreapta d_1, $\bar{X}=(0,\ 2)^T$ este program optim și $Z(\bar{X})=-2$. Problema admite o infinitate de programe, coordonatele semidreptei închise d_1^+. Din ecuația dreptei d_1

$$\frac{x_1}{1}=\frac{x_2-2}{2}=\lambda,$$

rezultă mulțimea programelor problemei

$$x_1=\lambda,\quad x_2=2+2\lambda,\quad \lambda \geqslant 0.$$

c. În problema inițială să schimbăm condițiile de nenegativitate cu x_1 oarecare, $x_2 \leqslant 0$. Mulțimea programelor problemei este formată din punctele

interioare și de pe laturile triunghiului A_3BD cu $D\ (-1,\ 0)$. Programul optim este $X=(-2,\ -2)^T$, corespunzător vîrfului A_3 și $min\ Z=-8$.

2. **Cazul** $n\geqslant 3$. Teoretic, pentru o problemă de programare liniară cu trei variabile dată sub formă standard metoda grafică este posibilă, deoarece putem reprezenta în spațiu elementele din R^3. Fiecare restricție determină un semiplan închis, intersecția semiplanelor este un *poliedru convex* P, mulțimea soluțiilor problemei. Intersecția lui P cu *octantul* nenegativ ($x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0$) determină mulțimea programelor problemei.

Funcția obiectiv determină un fascicul de plane paralele, *planele de nivel* ale problemei. Proprietatea (1.18) se păstrează.

Practic, metoda este aplicabilă doar pentru exemple artificial construite, datorită dificultăților de delimitare a mulțimii programelor, a determinării celui mai depărtat plan de origine etc.

Pentru $n>3$ metoda este neutilizabilă. Se reține doar limbajul : fiecare restricție determină un semispațiu în R^n, mulțimea soluțiilor este *politup* P, mulțimea programelor intersecția lui P cu *ortantul* nenegativ ($x_i\geqslant 0$), funcția obiectiv determină un fascicul de hiperplane paralele etc.

3. **Interpretarea geometrică în planul resurselor.** Ne vom referi numai la problema sub formă standard cu două restricții.

$$\text{(1.19)}\qquad \begin{aligned} &\text{optim} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=d_1 \\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=d_2 \\ &x_i\geqslant 0,\quad i=1\div n. \end{aligned}$$

Restricțiile problemei se pot scrie sub forma

$$x_1V_1+x_2V_2+\ldots+x_nV_n=D$$

și un program $\bar{X}=(\bar{x}_1\bar{x}_2\ \ldots\ \bar{x}_n)^T$ este o descompunere a lui D

$$D=\bar{x}_1V_1+\bar{x}_2V_2+\ldots+\bar{x}_nV_n$$

după vectorii V_i cu $\bar{x}_i\geqslant 0$, $i=1\div n$.

Dacă V_1 și V_2 sînt doi vectori independenți, un vector V are coordonatele (proiecțiile) în baza (V_1V_2) pozitive dacă el se găsește în *conul* determinat de V_1V_2, adică în subspațiul determinat de OV_1 și OV_2, cu $(OV_1,\ OV_2)<180^0$ (partea haşurată). Una din coordonate este nulă dacă $V\ ||\ V_1$ sau $V\ ||\ V_2$.

Rezultă că problema (1.19) admite programe numai dacă D se găsește în conul format de vectorii V_i. Programele de bază sînt descompunerile lui D după cîte o pereche de vectori V_i. Dacă $D\ ||\ V_k$ (coordonatele lui V_k proporționale cu coordonatele lui D) problema admite un program de bază nedegenerat.

În cazul general al unei probleme sub formă standard cu m restricții și n variabile, vectorul D trebuie să se găsească în conul vectorilor V_i (pentru a avea programe), iar programele de bază reprezintă descompunerile lui D după m

Scanned with OKEN Scanner

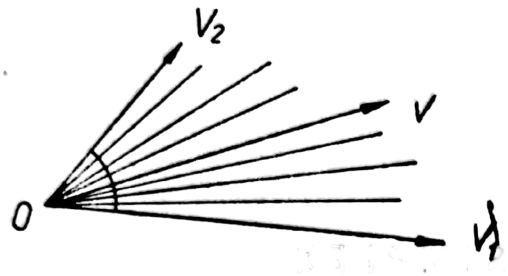


Fig. 1.3.

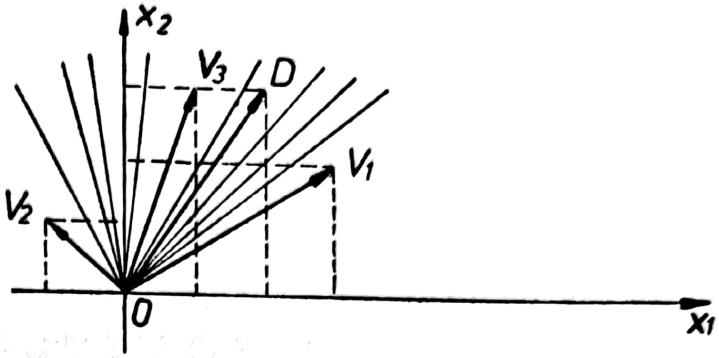


Fig. 1.4.

vectori liniar independenți dintre V_i, $i=1\div n$. Problema admite un program de bază degenerat cu $m-1$ coordonate nenule dacă D se află în hiperplanul determinat de $m-1$ dintre vectorii V_i. Mai general, dacă D este liniar dependent de $p<m$ vectori V_i problema admite un program degenerat cu p coordonate nenule.

Pentru problema rezolvată în aplicația de la § 1.2 avem

$$V_1=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\quad V_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\quad V_3=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

Din figura 1.4, D este situat în conul vectorilor V_1, V_2, V_3; problema admite programe. D nu este situat în conul vectorilor V_2, V_3 și deci (V_2V_3) nu este o bază admisibilă. De asemenea, D nu are direcția nici unuia dintre vectorii V_i; problema nu admite programe de bază degenerate.

Observație. În cazul concret tratat, restricțiile

$$3x_1-x_2+x_3=2$$

$$2x_1+x_2+3x_3=3$$

reprezintă o dreaptă din spațiul soluțiilor R^3.

Soluțiile de bază sînt intersecțiile dreptei cu planele de coordonate $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$. Soluțiile de bază degenerate, intersecțiile cu axele de coordonate. Sistemul liniar format din ecuațiile dreptei și $x_i=0$, $x_j=0$, $\forall i, j=1, 2, 3$ este incompatibil. Problema nu admite soluții de bază degenerate.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

2. ALGORITMUL SIMPLEX

§ 2.1. TEOREMELE ALGORITMULUI SIMPLEX

1. Preliminarii. Ne vom referi la problema

$$
\begin{aligned}
&\min z=\min\,(c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n)\\
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=d_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=d_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=d_m\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1\div n.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Am văzut (§ 1.2) că o astfel de problemă se poate rezolva explorînd toate bazele admisibile. Pe lîngă numărul mare de baze admisibile pe care le poate avea problema (2.1), metoda de rezolvare totală este îngreunată de lipsa unui criteriu precis de introducere a vectorilor în bază. Algoritmul simplex înlătură aceste deficienţe prin formularea unui criteriu de recunoaştere a unui program de bază optim şi a unui criteriu pentru stabilirea vectorului care intră în bază.

În problema (2.1) presupunem că rang $A=m<n$ şi că $D=(d_1d_2\ldots d_m)^T>0$. Fie B o bază admisibilă a matricei A şi X^B programul de bază corespunzător bazei B. Prin notaţia $i\in B$ înţelegem că $V_i\in B$, iar prin $j\in S$ că $V_j\notin B$.

Soluţia sistemului de restricţii (I, § 3.6) este

$$X^B=D^B-\sum_{j\in S}V_j^Bx_j$$

cu $D \geqslant 0$. Pentru coordonatele de pe linia i a vectorilor

$$x_i^B = d_i^B - \sum_{j \in S} a_{ij}^B x_j, \qquad i \in B. \tag{2.2}$$

Înlocuim (2.2) în funcția obiectiv și avem succesiv

$$z = \sum_{i \in B} c_i x_i + \sum_{j \in S} c_j x_j = \sum_{j \in S} c_j x_j + \sum_{i \in B} c_i \left(d_i^B - \sum_{j \in S} a_{ij}^B x_j \right) =$$

$$= \sum_{i \in B} c_i d_i^B + \sum_{j \in S} \left(c_j - \sum_{i \in B} c_i a_{ij}^B \right) x_j,$$

unde $\sum_{i \in B} c_i d_i^B = z^B$, valoarea funcției obiectiv pentru programul de bază $\bar{X}^B$. Notăm

$$z_j = \sum_{i \in B} c_i a_{ij}^B \tag{2.3}$$

și relația anterioară devine

$$z = z^B + \sum_{j \in S} (c_j - z_j^B) x_j. \tag{2.4}$$

Aplicăm (2.3) pentru $h \in B$; rezultă

$$z_h = \sum_{i \in B} c_h a_{ih}^B = \sum_{i \in B} c_h E_h = c_h$$

și

$$c_h - z_h^B = 0, \qquad \forall h \in B. \tag{2.5}$$

2. **Criteriul de optim.** *Programul de bază* $\bar{X}^B$ *este optim dacă*

$$c_j - z_j^B \geqslant 0, \qquad \forall j \in S. \tag{2.6}$$

Fie $\tilde{X}$ un program oarecare al problemei (2.1). Din $\tilde{x}_j \geqslant 0$, $\forall j \in S$ și (2.6) rezultă $\sum_{j \in S} (c_j - z_j^B) \tilde{x}_j \geqslant 0$ și din (2.4)

$$z(\tilde{X}) = z^B + \sum_{j \in S} (c_j - z_j^B) \tilde{x}_j \geqslant z^B,$$

adică $\bar{X}^B$ este program de bază optim.

Condiția (2.6) se poate înlocui cu

$$c_i - z_i^B \geqslant 0, \qquad i = 1 \div n \tag{2.7}$$

deoarece pentru $i \in B$ diferențele $c_i - z_i^B$ sînt nule (2.5).

Observaţie. Analog, pentru o problemă de maxim $\bar{X}^B$ este optim dacă

(2.8) $$c_i - z_i^B \leqslant 0, \qquad i = 1 \div n.$$

3. **Criteriul de intrare în bază.** *Dacă* $\exists\, c_k - z_k^B < 0$, $k \in S$, *programul* $\bar{X}^B$ *nu este optim şi programul se îmbunătăţeşte dacă vectorul* V_k *intră în bază.*

Dacă X_1 şi X_2 sînt două programe ale problemei (2.1) şi $z(X_2) < z(X_1)$, zicem că programul X_2 este mai bun decît X_1.

Dacă $c_k - z_k^B < 0$ şi vectorul V_k intră în bază în noul program $\tilde{X}$, $\tilde{x}_k > 0$, adică variabila x_k creşte de la zero în $\bar{X}^B$ la $\tilde{x}_k$ în $\tilde{X}$ şi din (2.4)

$$z(\tilde{X}) = \bar{z} + (c_k - z_k^B)\,\tilde{x}_k < \bar{z}^B,$$

adică programul $\tilde{X}$ este mai bun decît programul de bază $\bar{X}^B$.

Prin introducerea vectorului V_k în bază valoarea funcţiei obiectiv se îmbunătăţeşte (scade), deoarece

(2.9) $$(c_k - z_k^B)\,\tilde{x}_k < 0.$$

Dacă indicele k nu este unic determinat, adică există mai multe diferenţe negative, pentru a ne apropia mai rapid de valoarea minimă a funcţiei obiectiv trebuie ca produsul (2.9) să fie cît mai mic. Acest deziderat fiind greoi de aplicat, îl „simplificăm" prin condiţia ca primul factor să fie cît mai mare în valoare absolută. Obţinem astfel criteriul de intrare în bază sub forma : *dacă* $\exists\, c_j - z_j^B < 0$, *intră în bază vectorul* V_k pentru care

(2.10) $$c_k - z_k^B = inf\ \{c_j - z_j^B\}.$$

Observaţie. Pentru o problemă de maxim dacă $\exists\, c_j - z_j > 0$, intră în bază vectorul V_k pentru care

(2.11) $$c_k - z_k^B = sup\ \{c_i - z_i^B\}.$$

4. **Criteriul de optim infinit.** *Dacă* $\exists\, c_j - z_j^B < 0$ *şi* $c_k - z_k^B = sup\ \{c_j - z_j^B\}$, $a_{ik}^B \leqslant 0$, $\forall i \in B$,*problema admite un optim infinit.* Din condiţiile problemei, în baza criteriului anterior, vectorul V_k intră în bază şi variabila x creşte de la 0 la $\tilde{x}$. Valorile $\tilde{x}_i$, $i \in B$, ale variabilelor din noul program $\tilde{X}$ se modifică devenind

$$\tilde{x}_i = d_i^B - a_{ik}^B\,\tilde{x}_k, \quad \forall i \in B.$$

Dacă $a_{ik}^B \leqslant 0$, $\forall i \in B \Rightarrow \tilde{x}_i \geqslant 0$, $\forall i \in B$ şi $\forall \tilde{x}_k > 0$. Variabila $\tilde{x}_k$ poate lua valori oricît de mari şi problema admite un „optim infinit".

Observaţie. În cazul unei probleme de maxim, criteriul de optim infinit se menţine, luînd însă seama de criteriul de intrare în bază.

Scanned with OKEN Scanner

5. **Criteriul de ieșire din bază.** Nu enunțăm criteriul, el fiind cunoscut de la rezolvarea totală a unei probleme de programare liniară. Prin introducerea în bază a vectorului V_k, noul program are $m+1$ componente nenule, adică nu mai este un program de bază. Iese din bază vectorul V_h pentru care este îndeplinită condiția (1.15).

§ 2.2. ENUNȚAREA ALGORITMULUI SIMPLEX

Enunțăm algoritmul pentru problema de minim (2.1).

a) Se determină o bază admisibilă B și se calculează programul de bază corespunzător $\bar{X}^B$, valoarea funcției obiectiv $\bar{z}^B$ și diferențele $c_j - z_j^B$.

b) Dacă $c_j - z_j^B \geqslant 0$, $\forall j = 1 \div n$, programul $\bar{X}^B$ este optim și algoritmul s-a încheiat.

c) Dacă $\exists\, c_j - z_j^B < 0$ intră în bază vectorul V_k pentru care

$$c_k - z_k^B = inf\ \{c_j - z_j^B\}.$$

d) Dacă $a_{ik}^B \leqslant 0$, $\forall i = 1 \div n$, problema admite un optim infinit; algoritmul s-a încheiat.

e) Dacă $\exists\, a_{ik}^B > 0$ iese din bază vectorul V_h pentru care

$$\frac{d_h^B}{a_{hk}^B} = \inf_{a_{ik}^B > 0} \left\{ \frac{d_i^B}{a_{ik}^B} \right\}.$$

Se obține o nouă bază B_1 și se aplică algoritmul de la b.

Observație. Pentru o problemă de maxim se schimbă sensul inegalității în criteriul de optim b și „*inf*" în „*sup*" în criteriul de intrare în bază.

§ 2.3. EFECTUAREA CALCULELOR ÎN APLICAREA ALGORITMULUI SIMPLEX

În tabloul folosit la rezolvarea totală a problemei de programare liniară adăugăm o coloană C^B între coloanele B și D și deasupra vectorilor V_i scriem coeficienții corespunzători c_i ai funcției obiectiv

Din $\bar{z}^B = \sum_{i \in B} c_i d_i^B$ și (2.3) rezultă

$$z^B = C^B \cdot D^B, \quad z_i^B = C^B \cdot V_i, \quad i = 1 \div n. \tag{2.12}$$

Se adaugă sub tabel o linie z_j, obținută înmulțind succesiv coloana C^B cu coloanele următoare ale tabelului și o linie $c_j - z_j^B$ obținută scăzînd din linia c_j de deasupra tabelului linia valorilor z_j.

În dreapta tabelului putem adăuga, dacă problema are mai multe restricții, și o coloană cu rapoartele $d_i^B : a_{ik}^B$ necesare aplicării criteriului de ieșire din bază.

Aplicație. Să se rezolve

$$\begin{aligned} &max\ (2x_1+x_2)\\ &2x_1-\ x_2\geqslant -2\\ &\ x_1-2x_2\leqslant\ 2\\ &\ x_1+\ x_2\leqslant\ 5\\ &x_1,\quad x_2\geqslant 0. \end{aligned}$$

Soluție. Vectorul D al resurselor are prima coordonată -2; înmulțim prima ecuație cu -1 și aducem problema la forma standard

$$\begin{aligned} &max\ (2x_1+x_2)\\ &-2x_1+\ x_2+x_1^e\ \ \ \ \ \ =2\\ &\ x_1-2x_2\ \ \ \ +x_2^e\ \ \ =2\\ &\ x_1+\ x_2\ \ \ \ \ \ \ +x_3^e=5\\ &x_1,\ x_2\geqslant 0,\quad x_1^e,\ x_2^e,\ x_3^e\geqslant 0. \end{aligned}$$

Matricea A conține matricea unitate $(V_1^e\ V_2^e\ V_3^e)$. Baza inițială fiind asigurată și $D\geqslant 0$ putem aplica algoritmul simplex. Avem succesiv

				2	1	0	0	0	
	B	C^B	D	V_1	V_2	V_1^e	V_2^e	V_3^e	
	V_1^e	0	2	−2 ↓	1	1	0	0	
←	V_2^e	0	2	[1]	−2	0	1	0	$\left\{\frac{2}{1}, \frac{5}{1}\right\}$
	V_3^e	0	5	1	1	0	0	1	
		z_j	0	0	0	0	0	0	
		c_j-z_j		2	1	0	0	0	
	V_1^e	0	6	0	−3 ↓	1	2	0	
	V_1	2	2	1	−2	0	1	0	$\left\{\frac{3}{3}\right\}$
←	V_3^e	0	3	0	[3]	0	−1	1	
		z_j	4	2	−4	0	2	0	
		c_j-z_j		0	5	0	−2	0	
	V_1^e	0	9	0	0	1	1	1	
	V_1	2	4	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	
	V_2	1	1	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
		z_j	9	2	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	
		c_j-z_j		0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	

În ultimul tabel $c_j - z_j \leqslant 0$, $\forall j = 1 \div n$, deci programul $X_1 = (4 \quad 1 \quad 9 \quad 0 \quad 0)^T$ este programul optim al problemei sub formă standard. Programul optim al problemei date este $\bar{X} = (4 \quad 1)^T$ și valoarea maximă a funcției obiectiv este 9. În programul optim X_1 al problemei sub formă standard variabilele ecart x_2^e și x_3^e sînt nule; programul $\bar{X}$ verifică (ca egalități) ultimile două restricții.

Problema a fost rezolvată grafic la IV, § 1.3; am obținut, prin algoritmul simplex, același rezultat.

§ 2.4. DETERMINAREA UNUI PROGRAM INIȚIAL

1. În problema anterioară, matricea $A = (a_{ij})_{m \times n}$ a problemei sub formă standard conținea matricea unitate formată din vectorii V_1^e, V_2^e, V_3^e. Am considerat $B = (V_1^e \; V_2^e \; V_3^e)$ ca bază inițială și în programul de bază inițial variabilele de bază sînt egale cu coordonatele lui D.

Dacă matricea A a problemei (2.1) scrisă sub formă standard nu conține o matrice unitate, adăugăm tabelului coloanele vectorilor E_i, $i = 1 \div m$. Introducem succesiv în bază un vector V_k din A și eliminăm un vector E_h.

Transpunem în limbajul programării liniare rezultatele de la discuția sistemelor prin metoda pivotului.

a) Dacă rang $A = m$ se elimină toți vectorii E_i din bază și aplicăm algoritmul simplex.

b) Dacă rang $A = p < m$ și problema admite programe după introducerea în bază a p vectori V_i, $m - p$ linii din A și D sînt formate din zerouri. Se elimină aceste linii și se aplică algoritmul simplex.

c) Dacă rang $A = p < m$ și problema (2.1) nu admite programe, nu toate coordonatele lui D din cele $m - p$ linii de zerouri sînt nule. Problema (2.1) este imposibilă.

În efectuarea calculelor nu calculăm liniile z_j și $c_j - z_j^B$ decît după eliminarea vectorilor E_i din bază.

Observație. În problema (2.1) am pus condiția rang $A = m$. Introducerea bazei inițiale formată din vectorii E_i rezolvă și cazul rang $A < m$.

2. Metoda celor două faze. Presupunem că matricea $A = (a_{ij})_{m \times n}$ a problemei de programare liniară nu conține o matrice unitate. Adăugăm în fiecare ecuație o *variabilă artificială* $x_i^a \geqslant 0$, $i = 1 \div m$ și sistemul de restricții devine

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_1^a = d_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_2^a = d_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_m^a = d_m.
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

Matricea $(A \mid U_m)$ a sistemului conține o bază inițială formată din vectorii V_i^a, $i=1\div m$. Problema inițială se obține pentru $x_i^a=0$, $\forall i=1\div m$.

Problema se rezolvă în două faze. *În faza I se* determină

$$\min\ (x_1^a+x_2^a+\ldots+x_m^a), \tag{2.14}$$

cu restricțiile din (2.13) și $x_i\geqslant 0$, $\forall i=1\div n$, $x_i^a\geqslant 0$, $i=1\div m$. Problema inițială admite programe numai dacă $\min \sum_{i=1}^{m} x_i^a = 0$. Aplicăm algoritmul simplex și în final putem obține unul din cazurile $a-c$ din metoda anterioară. Dealtfel, vectorii artificiali V_i^a joacă rolul vectorilor E_i din metoda anterioară; introducerea funcției obiectiv (2.14) stabilește un criteriu de intrare în bază a vectorilor, deci o aplicare a algoritmului simplex de la început.

În faza a II-a se trece la

$$\text{optim}\ (c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n),$$

luîndu-se în primul tabel simplex, coloana D și matricea A din tabelul optim al primei faze.

Observație. Dacă matricea A a problemei inițiale conține un vector unitar E_k în restricția de rang k nu mai introducem variabila artificială.

Aplicație. Să se rezolve

$$\max\ (2x_1+3x_2+x_3-3x_4-5x_5+x_6)$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad & -2x_4- x_5+2x_6=2 \\ 3x_2-x_3- & x_4-3x_5+5x_6=1 \\ x_2+x_3+ & x_4- x_5+3x_6=3 \\ x_i\geqslant 0, \quad & i=1\div 6. \end{aligned}$$

Soluție. Matricea A conține vectorul unitar E_1. Introducem variabile artificiale în ecuația a doua și a treia și aplicăm metoda celor două faze.

Faza I. Determinăm

$$\min\ (x_2^a+x_3^a)$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad & -2x_4- x_5+2x_6 && =2 \\ 3x_2-x_3- & x_4-3x_5+5x_6+x_2^a && =1 \\ x_2+x_3+ & x_4- x_5+3x_6 && +x_3^a=3 \\ x_i\geqslant 0, \quad & i=1\div 6, \quad x_2^a\geqslant 0, \quad x_3^a\geqslant 0. \end{aligned}$$

Aplicăm algoritmul simplex și avem succesiv

Scanned with OKEN Scanner

	B	C_B	D	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_2^a	V_3^a
				0	0	0	0	0	0	1	1
	V_1	0	2	1	0	0	−2	−1	2	0	0
←	V_2^a	1	1	0	3	−1	−1	−3	[5]	1	0
	V_3^a	1	3	0	1	1	1	−1	3	0	1
	z_j		4	0	4	0	0	−4	8	1	1
	c_j-z_j			0	−4	0	0	4	−8	0	0
	V_1	0	$\frac{8}{5}$	1	$-\frac{6}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	0
←	V_6	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0
	V_3^a	1	$\frac{12}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	[$\frac{8}{5}$]	$\frac{8}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	1
	z_j		$\frac{12}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	1
	c_j-z_j			0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{8}{5}$	0
	V_1	0	1	1	−1	0	−2	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
	V_6	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
	V_3	0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$
	z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0
	c_j-z_j			0	0	0	0	0	0	1	1

Prima fază s-a încheiat : $min\ (x_2^a+x_3^a)=0$ şi au fost eliminaţi din bază toţi vectorii artificiali.

Faza a II-a. Calculăm

$$max\ (2x_1+3x_2+x_3-3x_4-5x_5+x_6).$$

În primul tabel simplex trasncriem coloanele D, V_1-V_6 şi V_2^a, V_3^a din tabelul optim al primei faze, ultimele două coloane fiind scrise din considerente ulterioare.

Scanned with OKEN Scanner

			2	3	1	−3	−5	1	—	—
B	C_B	D	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_2^a	V_3^a
V_1	2	1	1	−1	0	−2	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
← V_6	1	$\frac{1}{2}$	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
V_3	1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$
z_j		4	2	−2	1	−3	0	1		
c_j-z_j			0	5	0	0	−5	0		
V_1	2	2	1	0	0	−2	−1	2	0	0
V_2	3	1	0	1	0	0	−1	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
V_3	1	2	0	0	1	1	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
z_j		9	2	3	1	−3	−5	11	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
c_j-z_j			0	0	0	0	0	−10		

Programul optim este $X=(2 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$ şi $max\ z=9$.

Observaţie. Pentru problemele cu un număr restrîns de variabile şi restricţii, numărul variabilelor artificiale se poate reduce considerînd combinaţii liniare ale restricţiilor care să introducă vectori unitari. De exemplu, în cazul tratat restricţia a doua sau a treia se poate înlocui cu restricţia obţinută scăzînd din ecuaţia a 3-a înmulţită cu 4 ecuaţia a doua. Pentru problemele concrete, cu număr mare de variabile şi restricţii metoda nu prezintă importanţă.

§ 2.5. PROBLEME DE PROGRAMARE LINIARĂ CU MAI MULTE PROGRAME OPTIME

1. Ne referim la problema sub formă standard

(2.15) $$optim\ z=optim\ C^TX,\ AX=D,\ X\geqslant 0.$$

Fie B bază corespunzătoare optimului, $\bar{X}^B$ programul de bază optim şi

(2.16) $$c_k-z_k=0,\ k\in B.$$

Scanned with OKEN Scanner

Presupunem că $\exists a_{ik}^B > 0$, $i = 1 \div m$. Aplicăm în continuare algoritmul simplex introducînd în bază vectorul V_k. Obţinem un nou program de bază $\bar{X}^{B_1}$ şi

$$z(\bar{X}^{B_1}) = z(\bar{X}^B) + (c_k - z_k)\, x_k^0 = z(\bar{X}^B),$$

adică $\bar{X}^{B_1}$ este un al doilea program de bază optim.

Problema admite o infinitate de programe optime date de

$$\bar{X} = (1-\lambda)\,\bar{X}^B + \lambda \bar{X}^{B_1}, \quad \lambda \in [0,\ 1]. \tag{2.17}$$

Mulţimea programelor optime conţine un grad de libertate ; parametrul λ se poate determina impunînd modelului o condiţie suplimentară.

Dacă condiţia (2.16) este îndeplinită şi pentru un al doilea indice h şi $\exists a_{ih}^B > 0$, introducem în bază vectorul V_h şi obţinem un al treilea program de bază optim $\bar{X}^{B_2}$. Mulţimea programelor optime se obţine prin aplicarea combinaţiei convexe (2.17) a primelor două programe şi apoi a lui $\bar{X}$ şi al treilea program.

Geometric, $C^T \bar{X}^B = C^T \bar{X}^{B_1}$ şi din

$$C \cdot \bar{X}^B = C \cdot \bar{X}^{B_1} \Rightarrow C \cdot (\bar{X}^B - \bar{X}^{B_1}) = 0$$

şi hiperplanele de nivel sînt paralele cu muchia $\bar{X}^{B_1}\,\bar{X}^{B_2}$ a mulţimii P a programelor. În cazul a trei programe de bază optime hiperplanele de nivel sînt paralele cu o faţă a poliedrului convex P etc.

2. Pentru aceeaşi problemă (2.15) presupunem îndeplinită condiţia (2.16), dar $a_{ik}^B \leqslant 0$, $i \in B$. Vectorul V_k nu poate fi introdus în bază şi x_k poate lua valori oricît de mari.

Considerăm vectorul $\tilde{V}_k^B$ cu coordonatele

$$\tilde{a}_{ij}^B = \begin{cases} a_{ik}^B, & \text{dacă} \quad i \in B \\ -1, & \text{dacă} \quad i = k \\ 0, & \text{dacă} \quad i \in B. \end{cases} \tag{2.18}$$

Să verificăm că problema admite programele optime

$$X = \bar{X}^B - \lambda \tilde{V}^B, \qquad \forall \lambda \geqslant 0. \tag{2.19}$$

Într-adevăr, $\bar{X}^B - \lambda \tilde{V}^B \geqslant 0$, $\forall \lambda \geqslant 0$

şi

$$z(\bar{X}^B - \lambda \tilde{V}^B) = C^T \bar{X}^B - \lambda C^T V_k + \lambda c_k = z(\bar{X}^B).$$

Geometric, (2.19) reprezintă mulţimea punctelor de pe semidreapta închisă d^+ determinată de $\bar{X}^B$ şi vectorul $\tilde{V}^B$. Mulţimea P a programelor este deschisă şi hiperplanele de nivel sînt paralele cu muchia determinată de X şi direcţia $\tilde{V}^B$.

Spre deosebire de cazul anterior, singurul program de bază optim este $\bar{X}^B$.

Scanned with OKEN Scanner

De exemplu, în aplicația anterioară în ultimul tabel simplex, pe lîngă diferențele corespunzătoare vectorilor din bază și $c_4-z_4=0$. Introducem vectorul V_4 în bază.

			2	3	1	—3	—5	1
B	C^B	D	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
V_1	2	6	1	0	2	0	—1	4
V_2	3	1	0	1	0	0	—1	2
V_4	—3	2	0	0	1	1	0	1
z_j		9	2	3	1	—3	—5	11
c_j-z_j			0	0	0	0	0	—10

Am obținut un al doilea program de bază *optim* $X=(6 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0)^T$.

Mulțimea programelor dată de (2.17) este

$$X_1=(2+4\lambda \quad 1 \quad 2-2\lambda \quad 2\lambda \quad 0 \quad 0)^T.$$

Dar în tabelul anterior, cît și în ultimul tabel din aplicația amintită, $c_5-z_5=0$. Vectorul V_5 nu se poate introduce în bază, variabila x_5 putînd lua valori nemărginit de mari. Aplicăm pentru ultimul tabel (3.19) cu

$$\tilde{V}^B=\tilde{V}_5=(-1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0)^T \text{ și } \tilde{X}^B=X_1.$$

Se obține mulțimea programelor optime ale problemei

$$X=(2+4\lambda+\mu \quad 1+\mu \quad 2-2\lambda \quad 2\lambda \quad \mu \quad 0)^T,$$

cu $\lambda \in [0, 1]$, $\mu \geqslant 0$. Mulțimea programelor optime conține două grade de libertate.

§ 2.6. DEGENERAREA ÎN PROGRAMAREA LINIARĂ

1. Convergența algoritmului simplex. Ciclaj. În rezolvarea prin algoritmul simplex a unei probleme de programare liniară dacă la o anumită iterație introducem în bază vectorul V_k și scoatem din bază vectorul V_h se obține un nou program de bază, „mai bun decît cel anterior". Valoarea funcției obiectiv se îmbunătățește cu

(2.20) $$(c_k-z_k^B)\frac{d_h^B}{a_{hk}^B}.$$

Fie bazele succesive B_1, B_2, ..., B_t, ..., în număr finit, și X_1, X_2, ..., X_t, ... programele de bază corespunzătoare. Dacă toate programele de bază sînt nedegenerate, între valorile funcției obiectiv pentru o problemă de minim există relația

$$z(X_1) > z(X_2) > \ldots > z(X_t) > \ldots,$$

adică valorile funcției obiectiv descresc în spre minim. În cazul unei probleme de maxim valorile funcției obiectiv cresc înspre valoarea optimă. Numărul bazelor admisibile, deci și al programelor de bază, fiind finit, după un anumit număr de iterații se ajunge la un program optim sau la condiția de optim infinit.

Dacă în (2.20) unul din factori este nul, funcția obiectiv nu-și schimbă valoarea în noua iterație. Anularea diferenței $c_k - z_k$ corespunde atît condiției de minim, cît și celei de maxim și introducerea vectorului V_k în bază conduce la obținerea a încă unui program de bază optim (§ 2.5). Dacă al doilea factor este nul, $d_h^B = 0$ și programul $\bar{X}^B$ este degenerat.

În condițiile degenerării, funcția obiectiv poate să nu-și schimbe valoarea în mai multe iterații succesive și chiar să revenim la o bază admisibilă explorată anterior, fenomen numit *ciclaj*.

Ciclajul nu intervine în problemele concrete rezultate din modelarea unor fenomene economice. Diferitele exemple de probleme de programare liniară care conduc la ciclaj sînt construite artificial și prezintă o „degenerare profundă", cu un număr apreciabil de variabile de bază nule. Studierea degenerării prezintă un interes teoretic pentru justificarea în întregime a convergenței algoritmului simplex prin determinarea unor algoritmi care să împiedice apariția ciclajului.

2. **Problema perturbată a unei probleme de programare liniară. Evitarea ciclajului.** Într-o problemă de programare liniară degenerarea poate interveni încă din primul tabel simplex dacă vectorul D are cel puțin o coordonată nulă sau pe parcursul aplicării algoritmului simplex, dacă indicele h din criteriul de ieșire din bază nu este unic determinat. În adevăr, dacă V_k intră în bază și

$$\frac{d_h^B}{a_{hk}^B} = \frac{d_l^B}{a_{lk}^B} = \inf_{a_{ik}^B < 0} \left\{ \frac{d_i^B}{a_{ik}^B} \right\},$$

oricare dintre vectorii V_h sau V_l iese din bază ; în noul program $\bar{X}^{B_1}$, $d_l^{B_1} = 0$ sau $d_h^{B_1} = 0$. Noul program fiind degenerat există pericolul apariției ciclajului. Vom da o singură metodă de evitare a ciclajului.

Considerăm problema

$$\text{optim } C^T X,\ AX = D,\ X \geqslant 0 \tag{2.21}$$

și „problema perturbată"

$$\text{optim } C^T X$$

$$AX = D + \sum_{j=1}^{n} V_j \varepsilon^j, \tag{2.22}$$

$$X \geqslant 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Termenul liber al restricției de rang i

$$P_i(\varepsilon)=d_i+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon^j$$

este un polinom de gradul n în ε. Problema inițială se obține din problema perturbată pentru $\varepsilon=0$. Presupunem că $\varepsilon>0$ este arbitrar de mic, în sensul că dacă $p<q$ atunci

$$\varepsilon^p > P_i^q(\varepsilon), \quad \forall i=1\div m,$$

unde $P_i^q(\varepsilon)$ este polinomul format cu termenii lui $P_i(\varepsilon)$ de un grad cu cel puțin egal cu q.

Să demonstrăm că pentru $\varepsilon>0$, arbitrar de mic, *orice bază admisibilă a problemei inițiale este bază a problemei perturbate și că problema perturbată are toate programele de bază nedegenerate.*

Să presupunem, fără a particulariza problema, că baza admisibilă B a problemei inițiale este formată din primii m vectori V_i ai matricei A. Restricțiile problemei perturbate se pot scrie sub forma

$$x_i(\varepsilon)=d_i^B+\varepsilon^i+\sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}^B\varepsilon^j-\sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}^B x^j, \quad i=1\div m$$

și coordonatele bazice ale soluției de bază corespunzătoare bazei P sînt

$$\bar{x}_i^B(\varepsilon)=d_i^B+\varepsilon^i+\sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}^B\varepsilon^j, \quad i=1\div m \tag{2.23}$$

Din

$$d_i^B\geqslant 0,\ \varepsilon^i+\sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}^B\varepsilon^j>0,$$

ultima deoarece $i<j$, rezultă $\bar{x}_i(\varepsilon)>0$, $\forall i=1\div m$.

Deoarece diferențele $c_j-z_j^B$ nu depind de vectorul D ele sînt egale, în orice iterație, pentru cele două probleme. În particular, *cele două probleme admit aceeași bază optimă.*

În baza proprietăților demonstrate aplicarea, în condițiile degenerării, a criteriului de ieșire din bază al problemei perturbate înlătură posibilitatea apariției ciclajului în problema inițială.

Dacă vectorul V_k intră în bază, în problema perturbată iese din bază vectorul V_h pentru care

$$\frac{\bar{x}_h^B(\varepsilon)}{a_{hk}^B}=\inf_{a_{ik}^B>0}\left\{\frac{\bar{x}_i^B(\varepsilon)}{a_{ik}^B}\right\}, \tag{2.24}$$

unde

$$\frac{\bar{x}_i^B(\varepsilon)}{a_{ik}^B}=\frac{d_i^B}{a_{ik}^B}+\frac{a_{i1}^B}{a_{ik}^B}\varepsilon+\frac{a_{i2}^B}{a_{ik}^B}\varepsilon^2+\ldots+\frac{a_{in}^B}{a_{ik}^B}\varepsilon^n.$$

Dacă

$$\frac{d_h^B}{a_{hk}^B}=\inf_{a_{ik}^B>0}\left\{\frac{d_i^B}{a_{ik}^B}\right\} \tag{2.25}$$

Scanned with OKEN Scanner

și indicele h este unic determinat în ambele probleme, deoarece este arbitrar de mic ; iese din bază vectorul V_h rezultat din compararea coordonatelor vectorului D^B cu ale vectorului V_k, pentru coordonatele pozitive ale celui din urmă.

Să presupunem că (2.25) se realizează pentru submulțimea $M_1=\{h_1, h_2, \ldots, h_p\}$, $p<m$, a celor m indici corespunzători vectorilor din bază. Pentru problema inițială nu avem nici un criteriu care să stabilească care din vectorii V_h, $h\in M_1$, iese din bază, dar pentru oricare variantă noul program de bază este degenerat avînd $m-p+1$ coordonate nenule.

În problema perturbată rapoartele obținute din (2.24) pentru $i=h_1, h_2, \ldots, h_p$ au primii termeni egali și cel mai mic dintre ele, pentru ε arbitrar de mic, determinat de cel mai mic coeficient al lui ε. Dacă acest raport este unic determinat se elimină din bază vectorul corespunzător. În caz contrar se obține o submulțime $M_2\subset M_1$ de indici, rezultată din compararea vectorului V_1 cu vectorul V_k pentru coordonatele $i\in M_1$.

Se trece la compararea coeficienților lui ε^2 pentru $i\in M_2$, adică la compararea coordonatelor vectorului V_2 cu V_k. Dacă raportul este mic se elimină vectorul corespunzător din bază. În caz contrar se trece la coeficienții lui ε^3 etc.

Deoarece rang $A=m$, liniile matricei sînt liniar independente și după un număr finit de comparații se determină în mod unic cel mai mic raport.

Am obținut astfel un procedeu simplu de determinare a vectorului care părăsește baza în condițiile degenerării.

a) Se compară coordonatele vectorului V cu coordonatele pozitive ale vectorului V_k care intră în bază și fie M_1 mulțimea indicilor pentru care se realizează $\inf\limits_{a_{ik}^B>0}\left\{\dfrac{d_i^B}{a_{ik}^B}\right\}$. Dacă M_1 este formată dintr-un singur indice h, vectorul părăsește baza.

b) În caz contrar, se compară coordonatele vectorului V_i cu coordonatele lui V_k pentru $i\in M_1$. Se determină mulțimea de indici $M_2\subset M_1$ pentru care se realizează cel mai mic raport. Dacă M_2 este format dintr-un singur element se elimină vectorul corespunzător.

c) În caz contrar, se compară coordonatele lui V_2 cu coordonatele lui V_k etc.

De exemplu, dacă într-o problemă de maxim, după un număr oarecare de iterații, se ajunge la tabloul simplex

			2	6	1	12	1
B	C^B	D	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
V_1	2	1	1	−2	0	2	0
V_3	1	2	0	6	1	4	0
V_5	1	1	0	3	0	2	1
z_j		5	2	5	1	10	1
c_j-z_j			0	1	0	2	0

Scanned with OKEN Scanner

Vectorul V_4 intră în bază ; el are toate coordonatele pozitive. Comparăm coordonatele vectorilor D și V_4 : $inf\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2} \Rightarrow M_1 = \{1, 3, 5\}$; Comparăm V_3 cu V_4 : $inf\left\{\frac{1}{2}, \frac{0}{4}, \frac{0}{2}\right\} = 0$ $M_2 = \{3, 5\}$. Comparăm V_2 cu V_4 : $inf\left\{\frac{6}{4}, \frac{3}{2}\right\} = \frac{3}{2} \Rightarrow M_3 = \{3, 5\}$. Comparăm V_3 cu V_4 : $inf\left\{\frac{1}{4}, \frac{0}{2}\right\} = 0 \Rightarrow M_4 = \{5\}$ și vectorul V_5 părăsește baza.

§ 2.7. INTERPRETAREA ECONOMICĂ A ALGORITMULUI SIMPLEX

Ne referim la problema de organizare a producției § 1.1.2a. În modelul

$$max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant d_i, \; x_j \geqslant 0, \quad \begin{matrix} i = 1 \div m, \\ j = 1 \div n, \end{matrix}$$

d_i reprezintă cantitatea de resurse R_i de care dispune întreprinderea, a_{ij} cantitatea de resurse R_i folosită pentru realizarea unui sortiment S_j și c_j beneficiul realizat prin producerea unui singur sortiment S_j. Un vector coloană V_k din matricea costurilor unitare $A = (a_{ij})_{m \times n}$ reprezintă consumurile de resurse R_i necesare producerii unui sortiment S_k, adică desfășurarea „activității k" la nivel unitar.

Pentru rezolvare se aduce problema la forma standard prin introducerea variabilelor ecart $x_i^e \geqslant 0$ și restricțiile devin :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_i^e = d_i, \qquad i = 1 \div m.$$

Introducerea variabilelor ecart înseamnă considerarea a încă m sortimente fictive S_i^e ce s-ar putea realiza cu aceleași resurse. Pentru realizarea unui sortiment S_i^e se consumă o singură unitate de resurse R_i. În forma standard, întreprinderea desfășoară „$m+n$ activități".

Un program $\bar{X}_1 = (\bar{X} \mid \bar{X}^e)^T$, cu $\bar{X} = (\bar{x}_1 \; \bar{x}_2 \; \ldots \; \bar{x}_n)^T$, $\bar{X}^e = (\bar{x}_1^e \; \bar{x}_2^e \; \ldots \; \bar{x}_m^e)^T$, al problemei sub formă standard, reprezintă un plan de producție al întreprinderii, adică nivelul la care se desfășoară cele $m+n$ activități. Dacă în $\bar{X}_1$, $x_i^e = 0$ înseamnă că producerea celor m sortimente S_j la nivelul $\bar{X}$ consumă integral cantitatea de resurse R_i. În caz contrar, prin aplicarea planului de producție $\bar{X}_1$, întreprinderea mai dispune de o cantitate x_i^e din resursa R_i ce poate fi folosită la realizarea unui sortiment diferit de sortimentele inițiale S_j.

Programul optim al problemei sub formă standard fiind un program de bază, rezultă că din punct de vedere economic într-o organizare optimă a producției nu se vor desfășura decît *cel mult m activități*.

Rezolvarea totală a problemei de programare liniară — explorarea tuturor bazelor admisibile ale problemei — are semnificația determinării tuturor planurilor de producție cu m activități ce se pot realiza cu resursele R_i și reținerea planului care aduce întreprinderii cel mai mare beneficiu.

Algoritmul simplex, „simplifică" metoda de rezolvare totală prin reducerea bazelor care se explorează prin cel două criterii : criteriul de optim și criteriul de introducere în bază.

Dacă B este o bază atunci vectorul V_j, $j \notin B$ se exprimă sub forma

$$V_j = \sum_{i \in B} a_{ij}^B V_i ,$$

adică desfășurarea activității V_j la nivel unitar este echivalentă, ca și consum de resurse, cu realizarea a a_{ij}^B sortimente S_i, $i \in B$.

Din punct de vedere al beneficiului, realizarea unui sortiment S_j aduce întreprinderii un beneficiu de c_j unități bănești, iar prin realizarea celor a_{ij}^B sortimente S_i întreprinderea realizează un beneficiu.

$$z_j = \sum_{i \in B} c_i a_{ij}^B .$$

Din compararea celor două beneficii rezultă :

a) dacă $c_j - z_j < 0$, $c_j < z_j$ și producerea sortimentului S_j nu este rentabilă ;

b) dacă $c_j - z_j > 0$, $c_j > z_j$ și desfășurarea activității j (producerea sortimentului S_j) este rentabilă ;

c) dacă $c_j - z_j = 0$, $c_j = z_j$; producerea sortimentului S_j este echivalentă cu producerea a a_{ij}^B sortimente S_i.

Dacă $c_j - z_j < 0$, $\forall j \notin B$, rezultă că este nerentabilă desfășurarea oricărei activități din afara bazei și programul de bază corespunzător bazei B este optim.

Dacă există $c_j - z_j > 0$ și $c_k - z_k = sup\{c_j - z_j\}$, producerea sortimentului S_k este „cea mai rentabilă" și vectorul V_k intră în bază.

Aplicarea algoritmului simplex constă în studiul sistematic al variantelor de m activități de bază. În fiecare iterație o activitate V_h se înlocuiește cu o activitate V_k astfel ca beneficiul total să crească. Înlocuirea se face pînă cînd $c_j - z_j \leqslant 0$ și o creștere a beneficiului devine imposibilă în condițiile întreprinderii.

Dacă toți $c_j - z_j \leqslant 0$ și $\exists\, c_k - z_k = 0$, $V_k \notin B$, desfășurarea activității k este echivalentă din punct de vedere al beneficiului — în condițiile aceluiași consum de resurse — cu desfășurarea activităților i în proporție de a_{ij}^B. Prin introducerea în bază a vectorului V_k se obține un al doilea program de bază optim.

Interpretarea economică a criteriului de ieșire din bază este îngreunată de schimbarea semnificației vectorului D, din vector al resurselor în model, în vector al nivelelor activităților de bază în decursul iterațiilor și a stabilirii semnificației economice a elementelor a_{ij}^B.

În primul tabel simplex, $\left\{\frac{d_i}{a_{ik}}\right\}$ reprezintă cantitățile de sortimente S_h ce se pot realiza prin consumul integral al fiecărei resurse R_i. Numărul maxim de sortiment S_k ce se poate produce este

$$\frac{d_h}{a_{hk}} = inf\left\{\frac{d_i}{a_{ik}}\right\}$$

și resursa R_h se folosește integral. Se renunță la sortimentul fictiv S_h^e care nu aduce nici un beneficiu și întreaga cantitate d_h de resursă R_t rămasă disponibilă este folosită pentru realizarea de sortimente S_k care asigură cea mai mare creștere a beneficiului total: $c_k \frac{d_h}{a_{hk}}$.

Dacă indicele h nu este unic determinat, $\frac{d_h}{a_{hk}} = \frac{d_t}{a_{tk}}$, realizarea sortimentului S_k la nivelul stabilit epuizează pe lîngă resursa R_h și resursa R_t. Activitatea fictivă S_t^e bazată exclusiv pe resursa R_t nu se mai poate desfășura și noul program de bază este degenerat.

§ 2.8. PROBLEME DE PROGRAMARE LINIARĂ ÎN CARE VARIABILELE NU SATISFAC CONDIȚIILE DE NENEGATIVITATE

O astfel de problemă se aduce la modelul programării liniare în care toate variabilele sînt nenegative aplicînd transformările date în § 1.1.

Dacă $x_h \leqslant 0$ înlocuim în model

(2.26) $$x_h = -x_h^1, \quad x_h^1 \geqslant 0,$$

iar o variabilă oarecare x_k prin

(2.27) $$x_k = x_k^1 - x_k^2, \quad x_k^1 \geqslant 0, \quad x_k^2 \geqslant 0.$$

Se aduce problema la forma standard și se aplică algoritmul simplex. În final se revine la vechile variabile.

Aplicație. Să se rezolve

$$\min\ (x_1 + x_2)$$
$$2x_1 + x_2 \leqslant 2$$
$$2x_1 - 3x_2 \leqslant 2$$
$$-2x_1 + x_2 \leqslant 2$$
$$x_1 \leqslant 0, \ x_2 \text{ oarecare.}$$

Indicație. Aplicăm (2.26) și (2.27) și aducem problema la forma standard; obținem:

$$\min\ (-x_1^1 + x_2^1 - x_2^2)$$
$$-2x_1 + x_2^1 - x_2^2 + x_1^e = 2$$
$$-2x_1^1 - 3x_2^1 + 3x_2^2 + x_2^e = 2$$
$$2x_1^1 + x_2^1 - x_2^2 + x_3^e = 2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicăm algoritmul simplex. Ultimul tabel este

B	C_B	D	V_1^1	V_2^1	V_2^2	V_1^e	V_2^e	V_3^e
V_1^e	0	8	0	0	0	1	−1	2
V_2^2	−1	2	0	−1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
V_1^1	−1	2	1	0	0	0	1	3
z_j		−4	−1	1	−1	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$
c_j-z_j			0	0	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$

Programul optim al problemei sub formă standard este $x_1^1=2$, $x_2^1=0$, $x_2^2=2$, $x_1^e=8$, $x_2^e=x_3^e=0$. Programul optim al problemei inițiale este $x_1=-2$, $x_2=-2$.

Și în acest caz, în problema sub formă standard, $c_2-z_2=0$, vectorul V_2^1 nefiind în bază. Problema admite însă numai un singur program optim, deoarece V_2^2 fiind în bază și $V_2^1=-V_2^2$, rezultă $\tilde{V}=0$.

3. DUALITATEA IN PROGRAMAREA LINIARĂ

§ 3.1. DEFINIȚIA DUALITĂȚII

1. **Dualitate simetrică.** Fie problema de programare liniară sub forma standard

$$
\begin{aligned}
&\min\,(c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_kx_k+\ldots+c_nx_n)\\
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1k}x_k+\ldots+a_{1n}x_n\geqslant d_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2k}x_k+\ldots+a_{2n}x_n\geqslant d_2\\
&\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{h1}x_1+a_{h2}x_2+\ldots+a_{hk}x_k+\ldots+a_{hn}x_n\geqslant d_h\\
&\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mk}x_k+\ldots+a_{mn}x_n\geqslant d_m\\
&x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \ldots,\ x_k\geqslant 0,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

sub formă canonică. Prin definiție, *duala* problemei (3.1) este

$$
\begin{aligned}
&\max\,(d_1y_1+d_2y_2+\ldots+d_hy_h+\ldots+d_my_m)\\
&a_{11}y_1+a_{21}y_2+\ldots+a_{h1}y_h+\ldots+a_{m1}y_m\leqslant c_1\\
&a_{12}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{k2}y_k+\ldots+a_{m2}y_m\leqslant c_2\\
&\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{1k}y_1+a_{2k}y_2+\ldots+a_{hk}y_h+\ldots+a_{mk}y_m\leqslant c_k\\
&\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\ldots+a_{hn}y_h+\ldots+a_{mn}y_n\leqslant c_n\\
&y_1\geqslant 0,\ y_2\geqslant 0,\ \ldots,\ y_h\geqslant 0,\ \ldots,\ y_m\geqslant 0,
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

tot o problemă de programare liniară sub formă canonică, formată numai cu datele (coeficienții) primei probleme.

Scanned with OKEN Scanner

Problema duală (3.2) se obține din (3.1) astfel :

a) se schimbă natura extremului ;

b) restricției de rang j îi corespunde o *variabilă duală* $y_j \geqslant 0$;

c) fiecărei variabile x_i îi corespunde o *restricție duală*, o inecuație având ca și coeficienți ai necunoscutelor coordonatele vectorului V_i, ca termen liber coeficientul lui x_i din funcția obiectiv, și sensul conform formei canonice ;

d) coeficienții funcției obiectiv sînt termenii liberi ai restricțiilor problemei inițiale.

În exprimarea matriceală cele două probleme devin

$$\begin{array}{ll} \min C^T X & \max D^T Y \\ AX \geqslant D & A^T Y \leqslant C \\ X \geqslant 0 & Y \geqslant 0. \end{array} \tag{3.3}$$

Prima este o problemă cu m restricții și n variabile, iar duala cu n restricții și m variabile. Vectorii C și D își schimbă rolurile, iar A devine A^T.

Aplicînd problemei (3.2) transformările a—d se obține problema inițială (3.1). Cele două probleme formează un cuplu de probleme duale, una fiind duala celeilalte.

2. **Cazul general.** Considerăm problema (3.1) și duala sa (3.2). Vom considera succesiv cazurile în care o necunoscută sau o restricție din (3.1) nu respectă condiția impusă de forma canonică și studiem modificarea care survine în problema duală (3.2).

Dacă $x_k \leqslant 0$ se înlocuiește $x_k = -x_k^1$ în (3.1), $V_k \to -V_k$, restricția k din dual are coeficienții necunoscutelor de semn schimbat și înmulțind cu -1 sensul ei devine „$\geqslant$" ; restricția k din dual este o inecuație care nu corespunde formei canonice.

Dacă x_k oarecare, se înlocuiește $x_k = x_k^1 - x_k^2$ cu $x_k^1 \geqslant 0, x_k^2 \geqslant 0$, V_k se dedublează în V_k și $-V_k$, c_k în c_k și $-c_k$. Variabilelor x_k^1 și x_k^2 le corespund în dual două restricții cu aceiași termeni și sensuri „$\leqslant$" și „$\geqslant$" (după ce înmulțim a doua cu -1). Revenind la vechea variabilă x_k, restricția de rang k din dual este o egalitate.

Rezultă că transformările a—d pentru obținerea dualei se pot completa cu :

e) unei variabile nepozitive îi corespunde o restricție duală de sens contrar sensului impus de forma canonică, iar unei variabile oarecare, nesupusă restricției de semn îi corespunde ca restricție duală o ecuație.

Procedăm în mod analog pentru restricțiile problemei (3.1) Se obține :

f) unei restricții de sens contrar sensului impus de forma canonică îi corespunde o variabilă duală nepozitivă, iar unei restricții exprimată printr-o ecuație îi corespunde o variabilă oarecare.

Prin completarea transformărilor a—d cu e și f putem scrie duala unei probleme de programare liniară fără s-o aducem la forma canonică.

Scanned with OKEN Scanner

O metodă simplă de scriere a dualei unei probleme date se obține trecînd datele într-un tablou pe care aplicăm transformările a—b. Vom exemplifica prin scrierea dualei problemei

$$max\ (3x_1-x_2+x_3+4x_4)$$
$$3x_1-4x_2+\ x_3+\ x_4\leqslant 4$$
$$2x_1+\ x_2-3x_3\qquad =-2$$
$$x_1-3x_2\qquad +\ x_4\geqslant 7$$
$$2x_1+2x_2+\ x_3+2x_4\leqslant 9$$
$$x_1\geqslant 0,\ x_2\leqslant 0,\ x_3 \text{ oarecare},\ x_4\geqslant 0.$$

Formăm tabelul şi explicaţiile le dăm ulterior.

$max\rightarrow$	$\geqslant 3$	$\leqslant -1$	$=1$	$\geqslant 4$	$min\downarrow$
$y_1\geqslant 0$	3	−4	1	1	$\leqslant 4$
$y_2\in R$	2	1	−3	0	$=-2$
$y_3\leqslant 0$	1	−3	0	1	$\geqslant 7$
$y_4\geqslant 0$	2	2	1	2	$\leqslant 9$
	$x_1\leqslant 0$	$x_2\leqslant 0$	$x_3\in R$	$x_4\geqslant 0$	

Tabelul cuprinde schematic datele problemei considerate ; ulterior s-au completat coloana din stînga a variabilelor duale cu restricţiile de semn, consecinţă a coloanei din dreapta care specifică natura restricţiilor problemei iniţiale şi „semnele“ din faţa coeficienţilor funcţiei obiectiv a problemei iniţiale ca o consecinţă a ultimei linii. Problema iniţială se citeşte pe linii cu omiterea primei coloane şi cea dual pe coloane cu omiterea ultimei linii.

Problema dual este

$$min\ (4y_1-2y_2+7y_3+9y_4)$$
$$3y_1+2y_2+\ y_3+2y_4\geqslant 3$$
$$-4y_1+\ y_2-3y_3+2y_4\leqslant -1$$
$$y_1-3y_2\qquad +\ y_4=1$$
$$y_1\qquad +\ y_3+2y_4\geqslant 9$$
$$y_1\geqslant 0,\ y_2 \text{ oarecare},\ y_3\leqslant 0,\ y_4\geqslant 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

3. **Exemple de probleme duale.** Vom reda sub formă de tabel, în exprimare matriceală, cîteva exemple de cupluri de probleme duale.

(3.4)

$\min C^T X$ $AX \geqslant D$; $(=D)$; $[\leqslant D]$ $X \geqslant 0$	$\max D^T Y$ $A^T Y \leqslant C$ $Y \geqslant 0$; $(Y \in R)$; $[Y \leqslant 0]$
$\min C^T X$ $AX \geqslant D$; $(=D)$; $[\leqslant D]$ X oarecare	$\max D^T Y$ $A^T Y = C$ $Y \geqslant 0$; $(Y \in R)$; $[Y \leqslant 0]$
$\min C^T X$ $AX \geqslant D$; $(=D)$; $[\leqslant D]$ $X \leqslant 0$	$\max D^T Y$ $A^T Y \geqslant C$ $Y \geqslant 0$; $(Y \in R)$; $[Y \leqslant 0]$
$\min (C_1^T X_1 + C_2^T X_2)$ $A_1 X_1 + A_2 X_2 \geqslant D$; $(=D)$ $X_1 \geqslant 0$, $X_2 \leqslant 0$	$\max D^T Y$ $A_1^T Y \leqslant C_1$ $A_2^T Y \geqslant C_2$ $Y \geqslant 0$; $(Y$ oarecare$)$
$\min C^T X$ $A_1 X \geqslant D_1$ $A_2 X \leqslant D_2$ $X \geqslant 0$, $(\in R)$	$\max (D_1^T Y_1 + D_2^T Y_2)$ $A_1 Y_1 + A_2 Y_2 \leqslant C$; $(=C)$ $Y_1 \geqslant 0$, $Y_2 \leqslant 0$

Semnele ( ) și [ ] corespund în cele două probleme.

§ 3.2. PROPRIETĂȚI ALE DUALITĂȚII

Ne vom referi la cuplul de probleme duale (3.3). Deoarece orice problemă de programare liniară poate fi adusă la forma canonică, teoremele demonstrate se mențin oricare ar fi cuplul de probleme duale.

Teorema 1. *Pentru orice cuplu de programe, valoarea funcției obiectiv a problemei de maxim nu poate depăși valoarea funcției obiectiv a problemei de minim :*

Dacă $\bar{X}$, $\bar{Y}$ sînt două programe ale problemei de minim, respectiv maxim

$$A\bar{X} \geqslant D \qquad A^T\bar{Y} \leqslant C$$

$$\bar{X} \leqslant 0 \qquad \bar{Y} \geqslant 0.$$

Din prima relație, înmulțind la stînga cu $\bar{Y}^T$

$$\bar{Y}^T A\bar{X} \geqslant \bar{Y}^T D = D^T\bar{Y}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din a doua, $\bar{Y}^T A \leqslant C^T$ și înmulțind la dreapta cu $\bar{X} \Rightarrow \bar{Y}^T A\bar{X} \leqslant C^T\bar{X}$.
Se obține

$$D^T\bar{Y} \leqslant \bar{Y}^T A\bar{X} \leqslant C^T\bar{X}.$$

Teorema 2. *Dacă o problemă de programare liniară admite un optim infinit, duala ei nu admite programe.*

În baza teoremei anterioare

$$D^T\bar{Y} \leqslant C^T\bar{X},$$

oricare ar fi programele $\bar{X}$ și $\bar{Y}$ ale celor două probleme. Dacă în problema de maxim $D^T\bar{Y} \to +\infty$, $C^T\bar{X}$ din problema de minim $\to +\infty$ oricare ar fi programul $\bar{X}$.

Teorema 3. *Dacă una din problemele cuplului dual admite un optim finit și cealaltă admite optim finit.*

Notăm cu $z = C^T X$, $w = D^T Y$ cele două funcții obiectiv. În baza primei teoreme, dacă z_0 finit este optimul problemei de minim, funcția w este mărginită superior. Analog, dacă w_0 finit este optimul problemei de maxim, z este mărginită inferior.

Teorema 4. *Dacă pentru programele $\bar{X}$, $\bar{Y}$ a două probleme duale valorile funcțiilor obiectiv coincid ele sînt programele optime.* Avem $C^T\bar{X} = D^T\bar{Y}$ și aplicăm teorema 1.

Teorema 5. (Teorema fundamentală a dualității). *Pentru un cuplu de probleme duale este posibilă numai una din următoarele situații :*

a) *ambele probleme admit programe* și în acest caz *valorile optime ale funcțiilor de eficiență coincid ;*

b) *una din probleme are programe, iar cealaltă nu are ; prima problemă admite un optim infinit ;*

c) *nici una dintre probleme nu admite programe.*

În parte teorema fundamentală este o consecință a teoremelor anterior demonstrate. O demonstrație completă se găsește în [9].

Teorema 6 (Teorema ecarturilor). *Condiția necesară și suficientă ca programele $\bar{X}$ și $\bar{Y}$ să fie programe optime pentru problemele duale* (3.3) *este*

$$\bar{Y}^T(A\bar{X} - D) = 0, \quad (C - A^T\bar{Y})^T\bar{X} = 0. \tag{3.5}$$

Presupunem că $\bar{X} \geqslant 0$, $\bar{Y} \geqslant 0$ verifică relațiile (3.5).

Prin adunare din

$$-\bar{Y}^T D + C^T\bar{X} = 0 \quad C^T\bar{X} = D^T\bar{Y}$$

și programele sînt optime.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\bar{X}$, $\bar{Y}$ sînt respectiv programele optime ale problemelor duale (3.3), $C^T\bar{X}=D^T\bar{Y}$. Adunăm și scădem $\bar{Y}^TA\bar{X}$ și relația devine

$$(\bar{Y}^TA\bar{X}-D^T\bar{Y})+(C^T\bar{X}-\bar{Y}^TA\bar{X})=0$$

sau

$$\bar{Y}^T(A\bar{X}-D)+(C-A^T\bar{Y})^T\bar{X}=0.$$

Dar $AX-D\geqslant 0$, $C-A^TY\geqslant 0$ deoarece $\bar{X}$ și $\bar{Y}$ verifică restricțiile corespunzătoare, în relația anterioară cei doi termeni sînt nenegativi și rezultă (3.5).

Consecințe. Formele standard ale celor două probleme duale (3.3) sînt

$$\begin{array}{lll} & min\ z=min\ C^TX & max\ w=max\ D^TY \\ (3.6) & AX-UX^e=D & A^TY+UY^e=C \\ & X\geqslant 0,\ X^e\geqslant 0, & Y\geqslant 0,\ Y^e\geqslant 0. \end{array}$$

Programele $\bar{X}$ și $\bar{Y}$ verifică restricțiile și

$$\bar{X}^e=A\bar{X}-D, \qquad \bar{Y}^e=C-A^T\bar{Y},$$

unde $\bar{X}^e$ și $\bar{Y}^e$ sînt vectorii variabilelor ecart corespunzătoare programelor $\bar{X}$, $\bar{Y}$. Condițiile de optim (3.5) devin

$$(3.7) \qquad \bar{Y}^T\bar{X}^e=0, \qquad \bar{X}^T\bar{Y}^e=0,$$

ceea ce justifică denumirea **atribuită teoremei.**

În coordonate, relația (3.7) se exprimă sub forma

$$\sum_{i=1}^{m}\bar{y}_i\bar{x}_i^e=0, \qquad \sum_{i=1}^{n}\bar{x}_j\bar{y}_j^e=0$$

și deoarece toate coordonatele sînt nenegative, fiecare termen din cele două sume trebuie să fie nul.

Rezultă că, *restricțiile duale ale variabilelor de bază din programul optim al unei probleme sînt verificate strict* (ca egalități) *de programul optim al dualei.*

Aplicație. Să se rezolve problema de programare liniară

$$\begin{array}{l} max\ (2x_1+3x_2) \\ x_1-x_2\leqslant 6 \\ 2x_1-x_2\leqslant 8 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{array}$$

și să se deducă că duala nu admite programe.

Soluție. Aducem problema la forma standard și aplicăm algoritmul simplex.

Avem

			2	3	0	0
B	C_B	B	V_1	V_2	V_1^e	V_2^e
V_1^e	0	6	1	−1	1	0
V_2^e	0	8	2	−1	0	1
z_j		0	0	0	0	0
c_j-z_j			2	3	0	0

Problema dată admite un optim infinit. Duala

$$\min\ (6y_1+8y_2)$$
$$y_1+2y_2\geqslant 2$$
$$-y_1-\ y_2\geqslant 3$$
$$y_1\geqslant 0,\ y_2\geqslant 0$$

nu admite programe. Dealtfel restricţia a doua a dualei nu admite soluţii în condiţile de nenegativitate a variabilelor.

§ 3.3. REZOLVAREA SIMULTANĂ A UNUI CUPLU DE PROBLEME DUALE

1. Considerăm problemele duale (3.3). Să arătăm că prin rezolvarea primei probleme determinăm şi programul optim al celei de a doua.

Pentru aplicarea algoritmului simplex în restricţiile primei probleme, pe care pentru simplificarea exprimării o denumim problemă *primală*, introducem variabilele artificiale x_i^a, $i=1\div m$. Restricţiile, sub forma matriceală, devin

$$AX-UX^e+UX^a=D.$$

Dacă B este baza optimă, ultimul tabel simplex se poate exprima matriceal sub forma

(3.8)

			C^T		
B	C_B	D	$V_1\ V_2\ \dots\ V_n$	B^e	B^a
B	C_B	$B^{-1}D$	$B^{-1}A$	$-B^{-1}$	B^{-1}
z_j		$(C_B)^TB^{-1}D$	$(C_B)^TB^{-1}A$	$-(C_B)^TB^{-1}$	$(C_B)^TB^{-1}$
c_j-z_j			$C^T-(C_B)^TB^{-1}A$	$(C_B)^TB^{-1}$	—

Scanned with OKEN Scanner

Apariția ultimei coloane este rezultatul calculării coordonatelor vectorilor artificiali în diferitele baze admisibile și după epuizarea primei faze. Ea apare în dreptul matricei unitate din primul tabel simplex.

Considerăm vectorul $\bar{Y}^T=(C^B)^TB^{-1}$ și să demonstrăm că el reprezintă programul optim al problemei duale.

Baza B fiind optimă pentru problema primală toate diferențele c_j-z_j sînt nenegative și din (3.8)

$$C^T-(C^B)^TB^{-1}A\geqslant 0, \qquad (C^B)^TB^{-1}\geqslant 0. \tag{3.9}$$

Din prima relație

$$C^T-\bar{Y}^TA\geqslant 0\Rightarrow A^T\bar{Y}\leqslant C$$

și $\bar{Y}$ este soluție a problemei duale.

Din a doua relație (3.8) rezultă $\bar{Y}^T\geqslant 0$, deci $\bar{Y}$ este program al dualei.

Valoarea funcției obiectiv a dualei pentru programul $\bar{Y}$ este

$$w(\bar{Y})=D^T\bar{Y}=\bar{Y}^TD=(C^B)^TB^{-1}D=z(\bar{X})$$

și Y este programul optim al problemei duale și apare în tabelul (3.8).

Rezultă că, *programul optim al problemei duale se găsește pe linia z_j a ultimului tabel simplex al problemei duale în dreptul matricei unitate din primul tabel simplex.*

Observație. Reamintim că, datorită posibilității de a aduce orice problemă de programare liniară la forma canonică, proprietatea se păstrează oricare ar fi cuplul de probleme duale.

Aplicație. Să se rezolve

$$\begin{aligned} &\min\ (x_1+x_2)\\ &x_1-3x_2\leqslant 1\\ &-3x_1+2x_2\leqslant 4\\ &x_1\leqslant 0,\ x_2 \text{ oarecare.}\end{aligned}$$

Soluție. Înlocuim $x_1=-x_1^1$, $x_2=x_2^1-x_2^2$ și aducem problema la forma standard.

$$\begin{aligned} &\min\ (-x_1^1+x_2^1-x_2^2)\\ &-x_1^1-3x_2^1+3x_2^2+x_1^e=1\\ &3x_1^1+2x_2^1-2x_2^2+x_2^e=2\\ &x_1^1\geqslant 0,\ x_2^1\geqslant 0,\ x_2^2\geqslant 0,\ x_1^e\geqslant 0,\ x_2^e\geqslant 0\end{aligned}$$

și aplicăm algoritmul simplex.

Scanned with OKEN Scanner

				−1	1	−1	0	0
	B	C_B	D	V_1^1	V_2^1	V_2^2	V_1^e	V_2^e
	V_1^e	0	1	−1	−3	3	1	0
←	V_2^e	0	4	[3]	2	−2	0	1
	$z_j=$		0	0	0	0	0	0
	c_j-z_j			−1	1	−1	0	0
←	V_1^e	0	$\frac{7}{3}$	0	$-\frac{7}{3}$	[$\frac{7}{3}$]	1	$\frac{1}{3}$
	V_1	−1	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
	$z_j=$		$-\frac{4}{3}$	−1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
	c_j-z_j			0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
	V_2^2	−1	1	0	−1	1	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$
	V_1	−1	2	1	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$
	z_j		−3	−1	1	−1	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{4}{7}$
	c_j-z_j			0	0	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{4}{7}$

Programul optim este $x_1^1=2$, $x_2^1=0$, $x_2^2=1$, $x_1^e=x_2^e=0$ și pentru problema inițială $\tilde{x}_1=-2$, $\tilde{x}_2=-1$.

Duala problemei date este

$$max\ (y_1+4y_2)$$

$$y_1-3y_2\geqslant 1$$

$$-3y_1+2y_2=1$$

$$y_1\leqslant 0, \qquad y_2\leqslant 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

iar programul ei optim apare pe linia z_j în dreptul vectorilor V_1^e şi V_2^e, el este $\bar{y}_1 = -\frac{5}{7}$, $\bar{y}_2 = -\frac{4}{7}$. În programul optim al problemei primale nu apar variabilele ecart şi $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ verifică strict şi prima restricţie.

2. **Bază dual admisibilă.** Considerăm cuplul de probleme duale

$$\begin{array}{ll} \min C^T X & \max D^T Y \\ AX = D & A^T Y \leqslant C \\ X \geqslant 0 & Y \text{ oarecare} \end{array} \tag{3.10}$$

Condiţia necesară şi suficientă ca baza B a problemei primale să fie optimă este ca

$$B^{-1}D \geqslant 0,\ C^T - (C^B)^T B^{-1} A \geqslant 0. \tag{3.11}$$

Din prima relaţie rezultă că B este bază admisibilă, iar din a doua că toate diferenţele $c_j - z_j$ corespund condiţiei ca programul de bază corespunzător bazei B să fie optim.

Dar $\bar{Y}^T = (C^B)^T B^{-1}$ este program al dualei, deoarece din a doua relaţie rezultă $A^T \bar{Y} \leqslant C$; zicem că B este o bază *dual admisibilă*, deoarece ei îi corespund un program al problemei duale.

Condiţia de optim se poate enunţa sub forma: *o bază B este optimă dacă şi numai dacă ea este admisibilă şi dual admisibilă*

În particular, dacă o problemă de programare liniară are o infinitate de programe optime şi duala ei are o infinitate de programe optime.

§ 3.4. ALGORITMUL SIMPLEX DUAL

1. **Preliminarii.** Ne referim la problema sub formă standard

$$\min z = \min C^T X,\ AX = D,\ X \geqslant 0.$$

Fie M_1 mulţimea bazelor admisibile şi M_2 mulţimea bazelor dual-admisibile ale problemei. O bază B este optimă dacă $B \in M_1 \cup M_2$. Pentru obţinerea unei baze optime în algoritmul *simplex primal* (obişnuit) se explorează bazele $B \in M_1$, iar în algoritmul simplex dual se explorează bazele $B \in M_2$.

Criteriul de optim în algoritmul simplex primal se obţine punînd condiţia ca o bază admisibilă să fie dual-admisibilă; în algoritmul simplex dual, prin condiţia ca o bază dual-admisibilă să fie bază admisibilă. Rezultă, că o bază dual-admisibilă este optimă dacă $d_i \geqslant 0$, $\forall i \in B$.

În algoritmul simplex primal explorarea bazelor din M_1 se face prin modificarea succesivă — în baza criteriilor stabilite — a cîte un singur vector din bază, menţinerea în cadrul mulţimii M_1 fiind asigurată de criteriul de ieşire din bază. În algoritmul simplex dual metoda de explorare se păstrează, rămîne însă să stabilim un criteriu de menţinere în cadrul mulţimii M_2.

Scanned with OKEN Scanner

Fie baza $B \in M_2$ şi baza B_1 obţinută din B prin înlocuirea vectorului V_h prin V_k. În tabelele simplex corespunzătoare celor două baze avem

B	...	V_k	...	V_j	
.		.		.	
.		.		.	
.		.		.	
V_h		a_{hk}		a_{hj}	...
.		.		.	
.		.		.	
.		.		.	
V_i	...	a_{ik}	...	a_{ij}	...
.		.		.	
.		.		.	
.		.		.	

B_1	...	V_k	...	V_j	
.		.		.	
.		.		.	
.		.		.	
V_k		1		$\frac{a_{hj}}{a_{hk}}$	...
.		.		.	
.		.		.	
.		.		.	
V_i	...	0	...	$a_{ij} - \frac{a_{ik}a_{hj}}{a_{hk}}$	
.		.		.	
.		.		.	
.		.		.	

Pentru simplificarea scrierii am renunţat la indicele superior B, care indică baza în care sînt exprimate coordonatele vectorilor.

Calculăm diferenţele $c_j - z_j$ pentru baza B_1. Avem succesiv

$$c_j - z_j^{B_1} = c_j - c_k \frac{a_{hj}}{a_{hk}} - \sum_{i \in B \setminus \{h\}} c_i a_{ij} +$$

$$+ \frac{a_{hj}}{a_{hk}} \sum_{i \in B \setminus \{h\}} c_i a_{ik} = c_j - \sum_{i \in B} c_i a_{ij} - \frac{a_{hj}}{a_{hk}} \left(c_k - \sum_{i \in B} c_i a_{ik} \right)$$

sau

$$c_j - z_j^{B_1} = c_j - z_j^B - \frac{a_{hj}^B}{a_{hk}^B} \cdot (c_k - z_k^B),$$

relaţie în care am revenit la notarea bazei B.

Condiţia ca noua bază B_1 să fie dual-admisibilă este ca

$$c_j - z_j^B - \frac{a_{hj}^B}{a_{hk}^B} (c_k - z_k^B) \geqslant 0, \quad \forall j = 1 \div n,$$

relaţie verificată dacă

$$\frac{c_k - z_k^B}{a_{hk}^B} = \sup_{a_{hj}^B < 0} \left\{ \frac{c_j - a z_j^B}{a_{hj}^B} \right\}. \tag{3.12}$$

Rezultă că, dacă vectorul V_h iese din bază vectorul V_k care intră în bază este determinat de condiţia (3.12), condiţie din care rezultă $a_{hk}^B < 0$, adică în algoritmul simplex dual *pivoţii sînt negativi.*

Dacă $d_h^B < 0$, în noua bază B_1 valoarea funcţiei obiectiv, dată de relaţia (2.4), este

$$\bar{z}^{B_1} = \bar{z}^B + (c_k - z_k^B) \frac{d_h^B}{a_{hk}^B},$$

adică ea creşte spre minim. Pentru a asigura o creştere mai substanţială scoatem din bază vectorul V_h pentru care

$$d_h^B = \inf \{ d_i^B \}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Observaţie. Pentru o problemă de maxim menţinerea în cadrul programelor dual-admisibile este asigurată prin alegerea indicelui k care corespunde celui mai mic raport din mulţimea din membrul al doilea al relaţiei (3.12).

2. **Enunţul algoritmului simplex dual.** Pentru o problemă de minim, dacă B este o bază dual-admisibilă o iteraţie a algoritmului simplex dual constă din :

a) dacă $d_i^B \geqslant 0$, $\forall i = 1 \div m$, programul $\bar{X}^B$ este optim ;

b) dacă $\exists\, d_i^B < 0$, iese din bază vectorul V_h pentru care

$$d_h^B = inf\ \{d_i^B\} ;$$

c) dacă $a_{hk}^B \geqslant 0$, $\forall k = 1 \div n$, problema admite un optim infinit ;

d) dacă există $a_{hk}^B < 0$, intră în bază vectorul V_k pentru care

$$\frac{c_k - z_k^B}{a_{hk}^B} = \sup_{a_{hj}^B < 0} \left\{ \frac{c_j - z_j^B}{a_{hj}^B} \right\} .$$

Se calculează elementele noului tabel şi se trece la o nouă iteraţie prin aplicarea pasului a.

Observaţie. Nu tratăm problema determinării unei baze iniţiale dual-admisibile în general deoarece vom folosi algoritmul simplex dual în cazurile în care baza îndeplineşte această condiţie (reoptimizări, parametrizări). Pentru unele probleme baza iniţială se obţine foarte uşor. De exemplu, pentru o problemă de minim sub formă canonică în care $C \geqslant 0$, baza formată din vectorii corespunzători variabilelor ecart este o bază dual-admisibilă.

Aplicaţie. Să se rezolve problema de programare lineară

$$\begin{aligned} &min\ (3x_1 + 2x_2) \\ &x_1 + x_2 \geqslant 3 \\ &2x_1 + x_2 \geqslant 4 \\ &x_1 + 4x_2 \geqslant 6 \\ &x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Soluţie. Aducem problema la forma standard şi înmulţim restricţiile cu -1. Se obţine

$$\begin{aligned} &min\ (3x_1 + 2x_2) \\ &-x_1 - x_2 + x_1^e = -3 \\ &-2x_1 - x_2 + x_2^e = -4 \\ &-x_1 - 4x_2 + x_3^e = -6 \\ &x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_1^e \geqslant 0,\ x_2^e \geqslant 0,\ x_3^e \geqslant 0. \end{aligned}$$

Baza iniţială, formată din vectorii ecart, conduce la soluţia $X = (0\ 0\ -3\ -4\ -6)^T$; ea nu este bază admisibilă. Dar $C^B A = (0)_{1\times 3}$, $C - C^B A = (3\ \ 2\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$ şi toţi $c_j - z_j \geqslant 0$ corespund condiţiei de optim ; baza iniţială este dual- admisibilă şi putem aplica algoritmul simplex dual.

Scanned with OKEN Scanner

				3	2	0	0	0	
	B	C_B	D	V_1	V_2	V_1^e	V_2^e	V_3^e	
	V_1^e	0	-3	-1	-2	1	0	0	
	V_2^e	0	-4	-2	-1	0	1	0	
←	$-V_3^e$	0	-6	-1	$\boxed{-4}$	0	0	1	$\left\{\frac{3}{-1}, \frac{2}{-4}\right\}$
	z_j		0	0	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$			3	2	0	0	0	
	V_1^e	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	
←	$-V_2^e$	0	$-\frac{5}{2}$	$\boxed{-\frac{7}{4}}$	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	
	V_2	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\left\{-\frac{10}{7}, -2\right\}$
	z_j		3	$\frac{1}{2}$	2	0	0	$-\frac{1}{2}$	
	$c_j - z_j$			$\frac{5}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	
←	$-V_1^e$	0	$-\frac{3}{7}$	0	0	1	$-\frac{3}{7}$	$\boxed{\frac{1}{7}}$	
	V_1	3	$\frac{10}{7}$	1	0	0	$-\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	
	V_2	2	$\frac{8}{7}$	0	1	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\left\{-\frac{10}{3}, -1\right\}$
	z_j		$\frac{46}{7}$	3	2	0	$-\frac{10}{7}$	$-\frac{1}{7}$	
	$c_j - z_j$			0	0	0	$\frac{10}{7}$	$\frac{1}{7}$	
	V_3^e	0	3	0	0	-7	3	1	
	V_1	3	1	1	0	1	-1	0	
	V_2	2	2	0	1	-2	1	0	
	z_j		7	3	2	-1	1	0	
	$c_j - z_j$			0	0	1	1	0	

Coordonatele lui D sînt nenegative, programul optim al problemei date este $\bar{X}=(1 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 3)^T$, ultimele trei fiind variabile ecart.

Scanned with OKEN Scanner

Programul optim al problemei duale

$$max\ (3y_1+4y_2+6y_3)$$
$$y_1+2y_2+y_3\leqslant 3$$
$$y_1+y_2+4y_3\leqslant 2$$
$$y_1\geqslant 0,\ y_2\geqslant 0,\ y_3\geqslant 0,$$

se citeşte pe linia z_j în dreptul matricii unitate din primul tabel simplex. Primul tabel fiind obţinut prin înmulţirea restricţiilor cu -1 se schimbă semnul coordonatelor şi programul optim este $Y=(1\quad 1\quad 0)^T$. Valorile optime ale funcţiilor obiectiv coincid.

În baza teoremei ecarturilor, $\bar{y}_3=0$ deoarece $x_3^e=3\neq 0$ şi cele două restricţii ale dualei sînt verificate de $\bar{Y}$ ca egalităţi deoarece $\bar{x}_1=1\neq 0$, $\bar{x}_2=2\neq 0$

Observaţii. 1. Dacă în primul tabel simplex *aplicăm greşit* criteriul de intrare în bază, intră în bază V_1 în loc de V_2 şi tabelul al doilea devine

			3	2	0	0	0
B	C^B	D	V_1	V_2	V_1^e	V_2^e	V_3^e
V_1^e	0	3	0	3	1	0	-1
V_2^e	0	8	0	7	0	1	-2
V_1	3	6	1	4	0	0	-1
$z_j=$		18	3	12	0	0	-3
c_j-z_j			0	-10	0	0	3

Baza $V_1^e\ V_2^e\ V_1$ nu este dual admisibilă, iar funcţia obiectiv a depăşit valoarea minimă. În cazul nostru, noua bază este admisibilă şi putem aplica în continuare algoritmul simplex primal.

2. Sugerăm respectarea criteriului de ieşire din bază. Se va observa că acest criteriu — la fel ca şi criteriul de intrare în bază de la algoritmul simplex primal — este un criteriu „slab". Nerespectarea lui permite continuarea algoritmului şi nu întotdeauna prin mărirea numărului de iteraţii.

§ 3.5. INTERPRETAREA ECONOMICĂ A DUALITĂŢII

Ne vom referi la problema de planificare a producţiei (§ 1.1) utilizată şi la interpretarea algoritmului simplex primal.

În modelul

$$max\ z=max\sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant d_i, \quad i=1 \div m$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1 \div n.$$

unde d_i reprezintă disponibilul de resursă R_i, c_j beneficiul unitar al sortimentului S_j, iar a_{ij} consumul specific, deci cantitatea de resursă R_i consemnată pentru realizarea unui singur sortiment S_j. Variabilele x_j reprezintă nivele de activitate, iar funcția obiectiv beneficiul total al întreprinderii.

În problema duală

$$min \ w = min \sum_{i=1}^{m} d_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j=1 \div n$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i=1 \div m,$$

considerăm variabilele duale drept „costuri interne" unitare ale resurselor R_i. În acest caz, funcția obiectiv reprezintă valoarea totală a resurselor, iar $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ valoarea totală a resurselor consumate pentru realizarea unui sortiment S_j.

Problema duală se poate enunța sub forma: să se determine „costurile interne" unitare ale resurselor astfel încît beneficiul unitar al fiecărui sortiment să nu depășească valoarea resurselor consumate pentru realizarea lui, iar costul total al resurselor să fie minim.

Paradoxul din interpretarea restricțiilor devine și mai evident, dacă ne referim la proprietatea

$$w(\bar{Y}) \geqslant z(\bar{X}),$$

a cărei semnificație este: pentru nici un plan de producție și nici un sistem de „costuri interne" beneficiul total al întreprinderii nu poate depăși costul total al resurselor. Egalitatea dintre cele două mărimi se realizează doar pentru programele optime.

Determinarea ordinului de mărime al variabilelor duale din egalitatea valorilor optime ale funcțiilor obiectiv justifică denumirea de cost ca valoare pe resursă. Dar acest „cost" trebuie interpretat ca un cost intrinsec în cadrul unei activități economice echilibrate din cadrul întreprinderii și nu ca un cost de producție sau preț de achiziție.

Aceste afirmații sînt întărite de semnificația teoremei ecarturilor pentru modelul considerat. Din relațiile (3.7) rezultă că, într-un plan de producție optim nu se produc sortimente pentru care valorile consumurilor de resurse, calculate pe baza costurilor interne, depășesc beneficiile, iar costurile interne nenule sînt atribuite numai resurselor folosite integral în cadrul activități optime.

Scanned with OKEN Scanner

4. PROBLEMA TRANSPORTURILOR

§ 4.1. PARTICULARITĂȚILE PROBLEMEI TRANSPORTURILOR

1. **Modelul problemei de transport.** Problema constă în organizarea transportului de la m centre de producție sau furnizori F_i, a aceluiaș produs, la n centre de desfacere sau beneficiari B_j, cînd se cunosc următoarele date :

— disponibilul fiecărui furnizor ;

— necesarul fiecărui beneficiar ;

— costul unitar de transport de la fiecare beneficiar la fiecare furnizor.

Dacă notăm cu a_i disponibilul furnizorului F_i, cu b_j necesarul beneficiarului B_j și cu c_{ij} costul unitar de transport de la furnizorul F_i la beneficiarul B_j, datele problemei se pot cuprinde într-un singur tabel

(4.1)

F_i \ B_j	B_1	B_2	...	B_n	Disponibil
F_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
F_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
F_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
Necesar	b_1	b_2	...	b_n	

Scanned with OKEN Scanner

În prima parte ne vom referi numai la probleme de transport în care

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{4.2}$$

adică o problemă în care trebuie distribuit întregul disponibil. Dacă relația (4.2) este îndeplinită zicem că problema este *echilibrată*.

Transportul de la F_i la B_j zicem că se desfășoară pe *ruta* F_iB_j. În total problema conține mn rute.

A organiza transportul înseamnă a stabili cantitățile ce trebuiesc transportate pe fiecare rută, astfel încît costul total al transporturilor să fie minim.

Notăm cu x_{ij} cantitatea ce se transportă de la B_i la F_j; necunoscutele problemei se pot cuprinde în tabelul

(4.3)

F_i \ B_j	B_1	B_2	...	B_n	Disponibil
F_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	a_1
F_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	a_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
F_m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}	a_m
Necesar	b_1	b_2	...	b_n	$\sum a_i$ / $\sum b_j$

Costul transportului pe ruta $F_i \to B_j$ fiind $c_{ij}x_{ij}$, costul total al transportului este

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

o funcție de mn variabile.

Restricțiile problemei se stabilesc din tabelul (4.3) observînd că suma necunoscutelor de pe linia i reprezintă cantitatea totală de produs ce se transportă de la furnizorul F_i, iar suma necunoscutelor de pe coloana j, cantitatea totală ce se transportă la beneficiarul B_j. Aceste cantități, ținînd seama că problema este echilibrată, sînt egale respectiv cu disponibilul furnizorului F_i și necesarul beneficiarului B_j.

Din faptul că în cadrul transportului pe o rută se poate transporta o anumită cantitate de produs (rută folosită) sau nici un produs (rută nefolosită), rezultă condițiile de nenegativitate ale tuturor variabilelor.

Scanned with OKEN Scanner

Modelul problemei echilibrate de transport este :

$$\min f=\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
&x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=a_1\\
&x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}=a_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=a_m\\
&x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=b_1\\
&x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=b_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}=b_n
\end{aligned} \tag{4.5, 4.6}$$

$$x_{ij}\geqslant 0,\ \forall \begin{cases} i=1\div m\\ j=1\div n\end{cases} \tag{4.7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{4.8}$$

Restricţiile problemei se pot scrie sub forma

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i, \qquad i=1\div m\\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j, \qquad j=1\div n.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Modelul problemei de transport (4.4)—(4.8) este un model de programare liniară sub formă standard cu mn necunoscute şi $m+n$ restricţii. Se evidenţiază numărul extrem de mare de necunoscute. O problemă cu 8 furnizori 10 beneficiari are 80 de necunoscute. În aceste condiţii aplicarea metodelor generale de rezolvare a unei probleme de programare liniară la problemele de transport devine practic imposibilă.

Vom folosi următoarele notaţii : $C=(c_{ij})_{m\times n}$ pentru matricea costurilor unitare $X=(x_{ij})_{m\times n}$, pentru matricea necunoscutelor. Funcţia obiectiv poate fi considerată ca o funcţie scalară de variabilă matriceală X.

2. Proprietăţi ale programelor problemei de transport

a) *Mulţimea programelor unei probleme de transport nu este vidă.* Atribuim variabilelor din modelul (4.4)—(4.8) valorile

$$\bar{x}_{ij}=\frac{a_i b_j}{S},\quad i=1\div m,\quad j=1\div n,$$

cu $S=\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j$. Înlocuim în restricțiile (4.9) și obținem

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij}=\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{S}=\frac{a_i}{S}\sum_{j=1}^{n} b_j=a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij}=\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{S}=\frac{b_j}{S}\sum_{i=1}^{m} a_i=b_j,$$

adică, $\bar{X}=(\bar{x}_{ij})$ verifică restricțiile ; deoarece $a_i>0$, $b_j>0 \Rightarrow \bar{X}>0$.

b) *Un program de bază nedegenerat al unei probleme echilibrate de transport conține cel mult $m+n-1$ componente nenule.* Considerăm variabilele x_{ij} în ordinea citirii lor pe linii. În acest caz matricea A a restricțiilor, formată numai din 0 și 1, are structura

$$A=\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ U_n & U_n & \dots & U_n \end{array}\right)$$

unde A_i este o matrice $m\times n$ cu elementele de pe linia i egale cu 1 și celelalte zero, iar U_n matricea unitate. În aplicația (I. § 1.6) am arătat că

$$\text{rang } A=m+n-1$$

și proprietatea este demonstrată.

Dealtfel, rang $A<m+n$ rezultă din faptul că ecuațiile sistemului de restricții nu sînt liniar independente, suma primelor m fiind egală cu suma celorlalte n.

Observație. Programul optim al unei probleme de transport conține cel mult $m+n-1$ componente nenule. Rezultă numărul restrîns de rute ce trebuiesc folosite, astfel încît costul total al transportului să fie minim. În problema cu 8 furnizori și 10 beneficiari, cu 80 rute posibile, în cadrul programului optim se folosesc doar $8+10-1=17$ rute, adică 63 de variabile au valoarea zero. Considerațiile de ordin matematic impun o concentrare a transportului în sensul ca un beneficiar să fie aprovizionat de la cît mai puțini furnizori și invers.

§ 4.2. DETERMINAREA UNUI PROGRAM DE BAZĂ INIȚIAL

1. **Algoritmul general.** Din structura particulară a sistemului de restricții (4.9) formate din adunarea pe linii și coloane a tabelului (4.3) vom deduce cîteva considerațiuni asupra programelor problemei.

Orice program de bază $\bar{X}$ trebuie să conțină o variabilă de bază în fiecare linie și coloană a matricei X, iar valoarea maximă ce se poate atribui variabilei x_{ij} pentru a ne menține în cadrul mulțimii programelor este

(4.10) $$\bar{x}_{ij}=\inf\{a_i,\ b_j\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $a_i < b_j$, pentru $x_{ij} = \bar{x}_{ij} = a_i$ întreg disponibilul furnizorului F_i a fost repartizat, variabilele x_{ip}, $p \neq j$, iau valoarea zero. Se obține o nouă problemă echilibrată de transport cu $m-1$ furnizori în care necesarul beneficiarului B_j este $b_j - a_i$.

Dacă $a_i > b_j$, pentru $x_{ij} = \bar{x}_{ij} = b_j$ se anulează variabilele de pe coloana j și se obține o nouă problemă de echilibrată cu $n-1$ beneficiari (fără B_j), iar furnizorul F_i are un disponibil $a_i - b_j$.

Aplicînd procedeul de $m+n-2$ ori se obține o problemă echilibrată de transport cu o linie și o coloană, adică o problemă cu un singur beneficiar și un singur furnizor, atribuind variabilei valoarea comună a disponibilului și necesarului, am atribuit valori diferite de zero la $m+n-1$ variabile distribuind disponibilul fiecărui furnizor și asigurînd necesarul fiecărui beneficiar. Cu alte cuvinte, am determinat un program de bază al problemei.

Algoritmul general de determinare a unui program de bază inițial al unei probleme echilibrate de transport constă în :

a) alegerea unei legi (reguli) care să stabilească ordinea în care se atribuie valori necunoscutelor ;

b) în baza legii alese se atribuie succesiv variabilelor valorile maxime posibile în baza relației (4.10).

În funcție de legea aleasă, avem diferite „metode" de determinare a unui program inițial.

Observații. 1. În justificarea metodei generale de determinare a programului inițial am folosit tabelul (4.3) cu datele problemei și pentru faptul că o problemă de transport concretă o rezolvăm fără a mai scrie modelul matematic.

2. Atribuirea unei valori variabilei x_{hk} înseamnă că variabila *intră* în bază sau că ruta $F_h \to B_k$ este o rută folosită. Dacă prin intrarea în bază a unei variabile se anulează variabilele de pe linie și coloană programul de bază inițial are mai puțin de $m+n-1$ componente nenule ; el este degenerat.

2. **Metoda colțului Nord-Vest.** (stînga-sus). Metoda constă în atribuirea valorii maxime posibile variabilelor din colțul Nord-Vest al tabelului. Practic programul de bază inițial se deduce pe un tabel format (4.2) în care completăm succesiv valorile necunoscutelor care intră în bază.

Aplicație. Să se determine un program inițial al problemei de transport.

F_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	D
F_1	7	2	3	4	100
F_2	6	7	9	4	275
F_3	4	5	8	7	325
N	150	225	125	200	700 / 700

Soluţie. Într-un tabel asemănător trecem datele problemei fără costurile unitare.

F_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	D
F_1	100	—	—	—	100
F_2	50	225	—	—	275
F_3	—	—	125	200	325
N	150	225	125	200	700 / 700

Variabila din colţul N-V este x_{11} şi

$$\bar{x}_{11}=inf\{a_1,\ b_1\}=inf\{100,\ 150\}=100.$$

Trecem valoarea în căsuţa respectivă. Am transportat întreg disponibilul de la furnizorul F_1 şi pe linia întîi marcăm prin liniuţe căsuţele variabilelor careiau valoarea zero. Din tabel s-a suprimat prima linie, iar necesarul beneficiarului B_1 devine 50.

Atribuim valoarea variabilei x_{21} din colţul N-V tabelului rămas. Se ia $\bar{x}_{21}=inf\{50,\ 225\}=50$. Se anulează prima coloană şi variabila din colţul N-V este x_{22}; disponibilul lui F_2 este egal cu necesarul lui B_2. Se ia $\bar{x}_{22}=225$ şi programul este degenerat. Se continuă în acelaşi mod pînă la epuizarea tabelului.

Valoarea funcţiei obiectiv pentru programul $\bar{X}_1$ astfel determinat se obţine înmulţind cantităţile transportate trecute în căsuţe (variabilele bazice) cu costurile unitare de transport; se obţine $f(\bar{X}_1)=4\ 975$ unităţi băneşti.

3. **Metoda costurilor unitare minime.** În determinarea programului optim prin metoda N-V nu se ţine seama de costurile c_{ij} ceea ce poate conduce la un program iniţial pentru care costul total al transportului să fie mult mai mare decît optimul.

În noua metodă atribuim valori necunoscutelor în ordinea crescîndă a costurilor unitare.

De exemplu. să determinăm, pentru aceeaşi problemă, un program iniţial prin metoda costurilor minime. Renunţăm la scrierea datelor problemei, programul iniţial este:

—	100	—	—
—	—	75	200
150	125	50	—

Cel mai mic cost este $c_{12}=2$. Pentru $\bar{x}_{12}=inf.\{100,\ 225\}=100$ şi suprimăm prima linie. Costul următor $c_{24}=c_{31}=4$. Dintre cele două rute, $F_2\to B_4$ şi $F_3\to B_1$,

alegem pe aceea pe care putem transporta o cantitate mai mare. Rezultă $\bar{x}_{24}=200$ etc. Se obține programul $\bar{X}_2$ nedegenerat, și $f(\bar{X}_2)=3\,300$ u.b. Programul $\bar{X}_2$ este „mai bun" decît $\bar{X}_1$.

4. Metoda diferențelor maxime. (Vogel). Să analizăm transporturile la B_2 și B_3. Prin aplicarea programului $\bar{X}_2$ obținut prin metoda costurilor minime pe ruta $F_1 \to B_2$ se transportă $x_{12}=100$, ceea ce anulează posibilitatea aprovizionării lui B_3 de la F_1. Această aprovizionare trebuie efectuată de la F_2 și F_3, deci cu 5 u.b. mai scump decît de la F_1.

Dacă nu transportăm cantitatea 100 pe ruta $F_1 \to B_2$ putem aproviziona pe B_2 din F_3 doar cu 3 u.b. mai scump. Rezultă că diferența dintre costul imediat următor și costul minim de pe o linie sau coloană joacă un rol important în organizarea optimă a transportului.

Calculăm pe fiecare linie și coloană diferența dintre costul imediat următor și costul minim și introducem în bază variabila de pe linia sau coloana diferenței maxime corespunzătoare costului minim. Diferențele le notăm pe linii și coloane în dreapta și sub tabelul variabilelor.

Să aplicăm metoda aceleeași probleme

					D	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5
	—	—	100	—	100	1				
	50	—	25	200	275	2	2	1	3	◇3
	100	225	—	—	325	1	1	1	◇1	
N	150	225	125	200						
Δ_1	2	3	◇5	3						
Δ_2	2	2	1	◇3						
Δ_3	2	◇2	1							
Δ_4	2		1							
Δ_5	◇0		0							
Δ_6			0							

Am calculat diferențele Δ_1 pe linii și coloane. De exemplu, pe prima linie: $3-2=1$. Diferența maximă este 5 de pe coloana a 3-a, iar cel mai mic cost pe coloană este $c_{13}=3$. Luăm $x_{13}=inf\{100, 125\}=100$ etc.

Valoarea funcției obiectiv pentru programul $\bar{X}_3$ obținut este $f(\bar{X}_3)=3\,150$ u.b., deci $\bar{X}_3$ este un „program mai bun" decît $\bar{X}_2$.

Observație. Există și alte „metode" pentru determinarea unui program de bază inițial (diferența maximă pe linii, coloane, colț S-E etc.), determinate de posibilitățile multiple de alegerea legii prin care stabilim ordinea de intrare în bază a variabilelor. Ele nu prezintă nici un interes practic, deoarece nu sînt nici

mai simple și nici nu conduc la un program mai bun decît ultimele două metode tratate. Dacă într-o problemă de transport nu se specifică metoda prin care urmează să determinăm programul inițial, considerăm că este bine să se aplice metoda costurilor minime, deoarece este simplă și conduce la o valoare a funcției obiectiv apropiată de optim.

§ 4.3. TESTAREA ȘI ÎMBUNĂTĂȚIREA UNUI PROGRAM DE BAZĂ

1. **Introducere.** Fie $\bar{X}$ un program de bază nedegenerat al problemei de transport (4.4)—(4.8). Ne propunem să determinăm o nouă matrice a costurilor unitare, $G=(g_{ij})$, astfel încît costul total al transportului efectuat după programul X să fie nul.

Din elementele matricei $C=(c_{ij})$ scădem u_i pe linia i și v_j pe coloana j. Costul c_{ij} devine în noua matrice $c_{ij}-(u_i+v_j)$, iar costul total al transportului

$$G(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}[c_{ij}-(u_i+v_j)]x_{ij}$$

și avem succesiv

$$G(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}-\sum_{i=1}^{m}u_i\sum_{j=1}^{n}x_{ij}-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}v_j\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=F(X)-\sum_{i=1}^{m}u_ia_i-\sum_{j=1}^{n}v_jb_j.$$

Rezultă că

$$F(X)-G(X)=\text{const.}$$

și pe mulțimea restricțiilor (4.9) cele două funcții obiectiv au același program optim.

Pentru ca $G(X)$ să se anuleze pentru programul $\bar{X}$ este suficient ca

$$g_{ij}=\begin{cases}0, \text{ dacă } x_{ij}\in B\\ \text{oarecare, dacă } x_{ij}\notin B,\end{cases}$$

unde B este baza programului $\bar{X}$.

Rezultă

$$g_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)=0, \qquad x_{ij}\in B$$

sau

$$u_i+v_j=c_{ij}, \tag{4.11}$$

pentru c_{ij} corespunzători vectorilor din bază. Sistemul (4.11) de $m+n-1$ ecuații cu $m+n$ necunoscute îl rezolvăm atribuind o valoare uneia din variabile; vom considera $u_1=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Notăm

(4.12) $$c_{ij}^{*}=u_i+v_j \quad , \quad C^{*}=(c_{ij}^{*})$$

şi

(4.13) $$g_{ij}=c_{ij}-c_{ij}^{*}.$$

Observaţie. La aceste rezultate, ca dealtfel şi la cele următoare, se poate ajunge pe bază de dualitate.

Notăm cu u_i variabilele duale corespunzătoare restricţiilor (4.5) şi v_j cele corespunzătoare restricţiilor (4.6). Duala problemei de transport echilibrate (4.4)—(4.8) este

$$max\left(\sum_{i=1}^{m} a_i u_i+\sum_{j=1}^{n} b_j v_j\right)$$

(4.14) $$u_i+v_j\leqslant c_{ij}, \qquad i=1\div m, j=1\div n.$$

u_i oarecare, v_j oarecare.

Dacă $\bar{X}$ este un program de bază nedegenerat al problemei primale, atunci restricţiile duale corespunzătoare variabilelor nenule sînt verificate strict. Rezultă sistemul (4.11).

2. **Criteriul de optimalitate.** *Un program de bază* $\bar{X}$ *este optim dacă toţi* $g_{ij}\geqslant 0$.

Deoarece $g_{ij}\geqslant 0$ şi $X\geqslant 0$, $min\, G(X)=0$ şi din $G(\bar{X})=0$ rezultă că $\bar{X}$ este program optim.

Pentru testarea unui program se formează un tabel care cuprinde programul $\bar{X}$, matricea C^{*}, matricea G şi o coloană de concluzii. Rezolvarea sistemului (4.14) se face direct pe tabel. Deoarece $c_{ij}^{*}=c_{ij}$ pentru variabilele din bază în matricea C^{*} completăm aceste căsuţe cu costurile iniţiale (încercuite) dăm lui u_0 valoarea 0 şi determinăm celelalte necunoscute. Separăm celelalte căsuţe în două : sus scriem costul iniţial c_{ij} şi jos costul calculat c_{ij}^{*} obţinut din adunarea lui u_i şi v_j determinate anterior. Pentru matricea G, g_{ij} sînt nule pentru variabilele din bază, iar celelalte elemente se calculează din $c_{ij}-c_{ij}^{*}$ din căsuţele separate în c_{ij} şi c_{ij}^{*}. Pentru diferenţele pozitive punem numai semnul $+$.

De exemplu, să testăm programul X_3 obţinut prin metoda diferenţelor maxime.

$\bar{X}$				C^{*}				G				Concluzii
				v_j / u_i	0	1	3	2				
–	–	100	–	0	7 / 0	2 / 1	(3)	1 / −2	+	+	0	+	Programul este optim
50	–	25	200	6	(6)	7 / 7	(9)	(4)	0	0	0	0	
100	225	–	–	1	(1)	(5)	8 / 7	7 / 2	0	0	+	+	

Încadrarea în G a elementului 0 din linia și coloana a doua s-a făcut pentru considerente ulterioare.

3. **Criteriul de intrare în bază.** *Dacă* $\exists\, g_{ij}<0$ *programul* $\bar{X}$ *nu este optim și el se îmbunătățește dacă introducem în bază variabila* x_{hk} *pentru care* $g_{hk}<0$.

Dacă $g_{hk}<0$ și variabila x_{hk} crește de la 0 la o valoare ρ se obține un nou program $\bar{X}_1$ și $G(\bar{X}_1)=g_{hk}\rho$, adică

$$F(\bar{X}_1)=F(\bar{X})+g_{hk}\,\rho<F(X) \tag{4.15}$$

și $\bar{X}$ nu este optim.

Funcția obiectiv își îmbunătățește valoarea cu $g_{hk}\,\rho$. Ne asigurăm ca g_{hk} să fie cît mai mic, adică introducem în bază variabila x_{hk} pentru care

$$g_{hk}=inf\{g_{ij}\}. \tag{4.16}$$

4. **Criteriul de ieșire din bază** Dacă x_{hk} intră în bază, pentru a ne menține în mulțimea programelor de bază, una din variabilele de bază din $\bar{X}$ trebuie să părăsească baza, adică în noul program să i se atribuie valoarea 0. Pentru a determina variabila care iese din bază, marcăm în $\bar{X}$ căsuța variabilei care intră în bază cu $+$ și pe linia și coloana ei cîte o căsuță ocupată cu $-$ apoi pe coloană și linie cu $+$ etc., formînd astfel un lanț închis de căsuțe ocupate cu variabile de bază (excepție x_{hk}) și

$$\rho=inf\{\bar{x}_{ij}\}. \tag{4.17}$$

În căsuțele marcate cu plus adunăm ρ, iar în căsuțele cu minus scădem ρ.

Marcajul cu $+$ și $-$ este o consecință a faptului că pentru orice program suma variabilelor pe linii și coloane este constantă, iar (4.17) asigură menținerea în cadrul mulțimii programelor.

5. **Enunțul algoritmului de rezolvare a unei probleme de transport.** În rezolvarea unei probleme de transport se parcurg următorii pași :

a) se determină un program de bază inițial $\bar{X}$ și se calculează c_{ij}^* și diferențele g_{ij} ;

b) dacă toți $g_{ij}\geqslant 0$, programul $\bar{X}$ este optim ;

c) dacă $\exists g_{ij}<0$, intră în bază variabila x_{hk} pentru care

$$g_{hk}=inf\{g_{ij}\}\,;$$

d.) se formează lanțul închis de marcaje $+$ și $-$; se determină ρ astfel ca

$$\rho=inf\{\bar{x}_{ij}\}.$$

Se obține un nou program de bază pentru care aplicăm algoritmul de la punctul *a*. Iterațiile se continuă pînă la încadrarea în b.

De exemplu. să aplicăm algoritmul pentru programul X_2 determinat prin metoda costurilor minime.

Scanned with OKEN Scanner

$\bar{X}$				C^*					G				Concluzii
				v_j / u_i	1	2	5	0					
	− 100	+		0	7 / 1	(2)	3 / 5	4 / 0	+	(0)	◇ −2	+	$\inf\{g_{ij}\}=-2$
		75	200	4	6 / 5	7 / 6	(9)	(4)	+	+	(0)	(0)	
150	+ 125	− 50		3	(4)	(5)	(8)	7 / 3	(0)	(0)	(0)	+	$\rho=50$
$F(\bar{X})=3300$					1	2	3	−2					
	− 50	+ 50		0	7 / 1	(2)	(3)	4 / −2	+	(0)	(0)	+	
	+	− 75	200	6	6 / 7	7 / 8	(9)	(4)	−1	◇ −1	(0)	(0)	$\inf\{g_{ij}\}=-1$
150	175			3	(4)	(5)	8 / 6	7 / 1	(0)	(0)	+	+	$\rho=50$
$F(\bar{X})=3200$					0	1	3	−2					
		100		0	7 / 0	2 / 1	(3)	4 / −2	+	+	(0)	+	
	50	25	200	6	6 / 6	(7)	(9)	(4)	0	(0)	(0)	(0)	optim
150	175			4	(4)	(5)	8 / 7	7 / 2	(0)	(0)	+	+	

$F(\bar{X}) = 3150$

Observaţii. 1. Valoarea funcţiei obiectiv pentru un program se deduce din valoarea pentru programul anterior adunînd produsul $g_{ij}\,\rho$ din coloana concluziilor

2. Am obţinut două programe optime diferite. Explicaţia o vom da ulterior

§. 4.4. CAZURI DEOSEBITE ÎN PROBLEMA TRANSPORTURILOR

1. **Degenerare în problema transporturilor.** Problema transporturilor fiind o problemă de programare liniară, studiul degenerării are o importanţă pur teoretică şi urmăreşte demonstrarea convergenţei algoritmului utilizat.

Într-o problemă de transport degenerarea poate apare de la programul iniţial sau pe parcursul rezolvării, în cadrul unei iteraţii.

În primul caz, degenerarea intervine dacă pentru variabila x_{hk} care intră în bază $a_h=b_k$, unde prin a_h, b_k am notat disponibilul furnizorului F_h, respectiv necesarul beneficiarului B_k după introducerea în bază a unor variabile. Atribuim variabilei x_{hk} valoarea a_h și transportul s-a încheiat pe linia h și pe coloana k.

În al doilea caz, degenerarea apare dacă $\rho=inf\ \{x_{ij}\}$, din criteriul de ieșire din bază, nu este unic determinat. Atribuind valoarea ρ variabilei care intră în bază se anulează transportul pe toate rutele în care în programul anterior transportau o cantitate ρ.

Dificultatea în continuarea algoritmului constă în faptul că sistemul $u_i+v_j=c_{ij}$ are mai puțin de $m+n-1$ ecuații și nu se poate rezolva prin metoda utilizată anterior. O simplă analogie cu metoda generală de rezolvare a unei probleme de programare lineară înlătură această dificultate. În aplicarea algoritmului simplex în coloana D o variabilă de bază nulă este marcată prin 0, iar o variabilă care nu aparține bazei, tot nulă, nu este marcată în tabel.

Într-o problemă de transport dacă în programul inițial avem mai puțin de $m+n-1$ componente nenule, completăm cu 0 diferența de căsuțe pe liniile sau coloanele variabilelor care prin introducerea în bază au finalizat transportul pe linie și coloană. În al doilea caz, cînd degenerarea apare pe parcurs, dintre toate căsuțele în care transportau cantitatea ρ numai în una nu trecem nimic (scoatem variabila din bază), iar în celelalte trecem zero (nu scoatem variabilele din bază).

În aceste condiții în $\bar{X}$ apar două categorii de zerouri : zerourile corespunzătoare variabilelor nebazice nemarcate în matrice și zerourile corespunzătoare variabilelor din bază marcate prin 0, ultimele le numim „zerouri esențiale". Din punct de vedere matematic, dacă $x_{hk}=0$ esențial, de la furnizorul F_h la beneficiarul B_k transportăm o cantitate nulă, „iar dacă $x_{hk}=0$ neesențial, pe ruta F_hB_k nu efectuăm transport." Din acest considerent zerourile esențiale le marcăm — după regulile stabilite anterior — în căsuțele în care costul unitar de transport este mai mic.

Observație. În cadrul unei iterații dacă $\rho=0$, în noul program se schimbă numai căsuța cu zero esențial. Deoarece din punct de vedere econonic cele două categorii de zerouri au o singură semnificație „nu transportăm", în unele situații „optimul economic" poate apare într-o iterație anterioară „optimului matematic".

Aplicație. Să se rezolve problema de transport

F \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	D
F_1	2	3	6	5	100
F_2	6	4	4	5	100
F_3	10	5	9	9	150
N	50	50	100	150	350 / 350

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie. Determinăm programul iniţial prin metoda costurilor minime. Programul $\bar{X}$ are 4 valori nenule, deci este dublu degenerat. O primă degenerare apare la introducerea în bază a variabilei x_{12}. Considerăm $x_{22}=0$, deoarece 4 este cel mai mic cost pe linia întîia şi coloana doua (dintre costurile căsuţelor neocupate). A doua degenerare apare la introducerea în bază a variabilei x_{23}, din aceleaşi considerente considerăm $x_{24}=0$.

$\bar{X}$				C^*					G				Concluzii
				$u_i \backslash v_j$	2	3	3	4					
50	50			0	2	3	6/3	5/4	0	0	+	+	$inf\ \{g_{ij}\}=-3$
	−0	100	+0	1	6/3	4	4	5	+	0	0	0	
	+		−150	5	10/7	5/8	9/8	9	+	−3	+	0	$\rho=0$
$F(\bar{X})=2000$					2	3	6	7					
50	−50		+	0	2	3	6/6	5/7	0	0	0	−2	$inf\ \{g_{ij}\}=-2$
		100	0	−2	6/0	4/1	4	5	+	+	0	0	$\rho=50$
	+0		−150	2	10/4	5	9/8	9	+	0	+	0	
$F(\bar{X})=2000$					2	1	4	5					
50			50	0	2	3/1	6/4	5	0	+	+	0	
		100	0	0	6/2	4/1	4	5	+	+	0	0	optim
	50		100	4	10/6	5	9/8	9	+	0	+	0	

$F(\bar{X})=1\,900$.

Primul tabel reprezintă un exemplu de modificare a poziţiei unui zero esenţial în cadrul unei iteraţii.

2. **Probleme de transport cu mai multe programe optime.** Fie $\bar{X}_1$ programul de bază optim şi $g_{hk}=0$, $x_{hk} \in B$. Prin introducerea în bază a variabilei x_{hk} valoarea funcţiei obiectiv nu se modifică. Se obţine un al doilea program de bază

optim $\bar{X}_2$. Mulțimea programelor problemei este dată de combinația convexă $\bar{X}=(1-\lambda)\,\bar{X}_1+\lambda\bar{X}_2$, $\lambda\in[0,\ 1]$.

Exemplu. În problema rezolvată în § 4.3 la testarea programului $\bar{X}_3$, $g_{22}=0$, $x_{22}\notin B$. Introducem în bază variabila x_{22} și obținem programul optim $\bar{X}_3'$. În dreapta am scris mulțimea programelor optime.

$\bar{X}$			
		100	
	50	25	200
150	175		

$\bar{X}$			
		100	
50 (1−λ)	50λ	25	200
100+50λ	225−50λ		

, $\lambda\in[0,1]$.

3. **Probleme de transport neechilibrate.** Într-o problemă de transport neechilibrată

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Dacă disponibilul este mai mare decît necesarul $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, se consideră un beneficiar fictiv B_{n+1} căruia i se atribuie un necesar egal cu surplusul de disponibil. Dacă necesarul este mai mare decît disponibilul se consideră un furnizor fictiv F_{m+1} căruia i se atribuie ca disponibil diferența $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$.

În ambele cazuri problema devine echilibrată. Pentru a nu modifica funcția obiectiv a problemei inițiale costurile unitare corespunzătoare beneficiarului sau furnizorului fictiv se consideră nule. De asemenea în determinarea programului inițial, indiferent de metoda aplicată, coloana sau linia beneficiarului sau furnizorului fictiv nu o încadrăm în legea care stabilește ordinea de intrare a necunoscutelor în bază.

De exemplu. Pentru problema

F \ B	B_1	B_2	B_3	D
F_1	5	3	7	300
F_2	6	6	4	150
F_3	7	5	8	200
N	125	200	175	650 / 500

problema echilibrată și programul de bază inițial, determinat prin metoda costurilor minime, sînt

F \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	D
F_1	5	3	7	0	300
F_2	6	6	4	0	150
F_3	7	5	8	0	200
N	125	200	175	150	650 / 650

$\bar{X}$			
100	200	—	—
—	—	150	—
25	—	25	150

4. Rute interzise. Dacă transportul de la furnizorul F_h la beneficiarul B_k nu se poate efectua, zicem că ruta F_hB_k este interzisă. În programul optim $\bar{X}$, variabila x_{hk} nu poate fi în bază : $\bar{x}_{hk}=0$.

Dacă interzicerea rutei apare încă din enunțul problemei atribuim transportului pe ruta F_hB_k un cost $\tilde{c}_{hk}>c_{ij}$, $\forall i=1\div m$, $\forall j=1\div n$. În programul inițial, determinat prin una din metodele care ține seamă de costurile unitare, variabila x_{hk} nu este de bază și datorită costului ridicat în general, ea nu intră în bază nici în iterațiile următoare.

Dacă interzicerea rutei apare după determinarea programului de bază optim, modificarea costului c_{ij} cu $\tilde{c}_{ij}$ se aplică în ultima iterație sau se consideră ca program inițial unul din programele din iterațiile anterioare în care ruta nu este utilizată.

Observație. Dacă $a_h>\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}a_i$ sau $b_k>\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}b_j$, ruta F_hB_k nu poate fi evitată oricît de mare ar fi valoarea c_{hk} atribuită costului unitar corespunzător. În primul caz, în programul optim $\bar{X}$ se transportă o cantitate cel puțin egală cu $2a_h-\sum_{i=1}^{m}a_i$; în al doilea, $2b_k-\sum_{j=1}^{n}b_j$. Transportul nu se poate efectua fără a face apel la încă un furnizor sau beneficiar.

De exemplu în aplicația de la § 4.4.1 dacă ruta F_1B_4 este interzisă, considerăm ca program inițial programul din a doua iterație și cu $\tilde{c}_{14}=11$ testăm programul și continuăm algoritmul.

Dacă ruta F_2B_3 este interzisă variabila x_{23} este de bază în toate iterațiile. Considerăm $\tilde{c}_{23}=11$ și testăm ultimul program (optim) în noile condiții.

Scanned with OKEN Scanner

5. **Problemle de maxim de tip transport.** Modelul problemei este

$$max \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1 \div m \tag{4.18}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1 \div n$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \ \forall i = 1 \div m, \ \forall j = 1 \div n.$$

Singura modificare față de problema tratată se referă la natura extremului, ceea ce face posibilă preluarea nemodificată a majorității proprietăților stabilite și justifică păstrarea denumirii de problemă de „tip transport", deși în analiză după criteriul „cheltuieli" problema nu are sens.

O analiză după criteriu „venit" dovedește însă existența unor probleme economice care se transpun în modelul (4.18). Dacă constantele a_i reprezintă capacitățile de producție a m întreprinderi F_i, care realizează n produse P_j, b_j posibilitățile de desfacere a produselor P_j, iar c_{ij} venitul realizat de întreprinderea F_i prin desfacerea unui produs P_j se obține un model de problemă de planificare în scopul obținerii unui venit maxim în condițiile folosirii integrale a resurselor.

Pentru problema echilibrată (4.18) singurele modificări față de problema de minim sînt:

a) la determinarea unui program inițial „cost minim" se înlocuiește cu „venit maxim";

b) un program de bază este optim dacă toți $g_{ij} \leqslant 0$;

c) dacă $\exists\, g_{ij} > 0$, intră în bază variabila x_{hk} pentru care $g_{hk} = sup\{g_{ij}\}$.

Aplicație. Să se rezolve problema de maxim

F \ P	P_1	P_2	P_3	P
F_1	8	9	6	75
F_2	3	7	8	125
F_3	4	6	5	100
D	100	100	125	300 / 325

în care coeficienții au semnificația din interpretarea dată modelului general.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie. Echilibrăm problema considerînd a patra întreprindere fictivă F_4 cu o capacitate de producţie egală cu 25. Determinăm programul iniţial prin metoda „veniturilor maxime".

$\overline{X}$			C^*			G			Concluzii
			u_i \ v_j	7	9	10			
+	− 75		0	8 / 7	(9)	6 / 10	◇1	(0)	−
	0	125	−2	3 / 5	(7)	(8)	−	(0)	(0)
− 75	+ 25		−3	(4)	(6)	8 / 7	(0)	(0)	1
25			−7	(0)	0 / 2	0 / 3	(0)	−	−
$F(\overline{X})=2\,125$				8	9	10			
75	0		0	(8)	(9)	6 / 10	(0)	(0)	−
	0	125	−2	3 / 6	(7)	(8)	−	(0)	(0)
	100		−3	4 / 5	(6)	5 / 7	−	(0)	−
25			−8	(0)	0 / 1	0 / 2	(0)	−	−

$sup\ \{q_{ij}\}=1$
$\varepsilon=75$

optim

$F(\overline{X})=2200$

5. REOPTIMIZĂRI IN PROGRAMAREA LINIARĂ

§ 5.1. ASPECTUL ECONOMIC ŞI MATEMATIC AL PROBLEMEI

1. O problemă de programare liniară reprezintă modelul matematic al unui proces economic la un moment dat. Rezolvarea ei permite luarea unei decizii optime în condiţiile existente. Orice modificare în procesul economic atrage după sine modificări în modelul matematic. Aceste modificări în model pot consta în schimbarea unor coeficienţi, în adăugarea sau renunţarea la unele restricţii sau variabile.

De exemplu, pentru problema de organizare a producţiei utilizată la interpretarea economică a algoritmului simplex primal şi dual

$$\begin{aligned} &max\ C^TX \\ &AX \leqslant D \\ &X \geqslant 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

o modificare a nivelului resurselor se reflectă în vectorul termenilor liberi, a beneficiilor unitare în vectorul C, a consumurilor specifice în vectorii coloană V_i din matricea A, introducerea în fabricaţie a unor noi sortimente în adăugarea unor variabile, a folosirii unei noi tehnologii prin adăugarea unor noi restricţii etc.

Un proces economic, oricît de simplu ar fi el, nu este static, el se modifică de la o perioadă la alta. Aceasta impune determinarea deciziei optime în condiţiile unor modificări survenite în modelul iniţial.

Schimbarea chiar a unui singur coeficient din modelul iniţial reprezintă o nouă problemă de programare liniară, care se poate rezolva independent de modelul iniţial. Abordarea problemei sub această formă comportă un volum mare de muncă şi implicit o întîrziere în cunoaşterea informaţiilor necesare luării unor

decizii. Aceste dificultăți pot fi diminuate prin folosirea în determinarea programului optim al problemei modificate a rezultatelor obținute în rezolvarea problemei inițiale. Acest ultim mod de abordare a problemei, de determinarea a unei noi decizii optime pornind de la o decizie optimă anterioară, se numește *reoptimizare sau post-optimizare*

2. În studiul teoretic al reoptimizării ne vom referi la problema sub formă standard

$$\begin{aligned} &optim\ z = optim\ C^T X \\ &AX = D \\ &X \geqslant 0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

formă la care poate fi adusă orice problemă de programare liniară prin introducerea variabilelor ecart.

Reamintim că, dacă B este baza optimă și X^B programul optim, în ultimul tabel simplex inversa B^{-1} a bazei se citește pe linia z_j în dreptul matricei unitate din primul tabel simplex, iar vectorul $\bar{X}^B$, al coordonatelor de bază din X^B, este

$$\bar{X}^B = B^{-1} D. \tag{5.3}$$

Valoarea optimă a funcției obiectiv

$$\bar{z}^B = (C^B)^T\ B^{-1} D, \tag{5.4}$$

unde C^B reprezintă vectorul coordonatelor lui C corespunzătoare vectorilor coloană $V_i \in B$ ai matricei A.

Tot în tabelul optim, matricea A apare sub forma ei redusă $B^{-1}A$ corespunzătoare bazei B, iar linia diferențelor $\Delta_j = c_j - z_j^B$, $j = 1 \div n$ este un vector linie Δ dat de

$$\Delta = C^T - (C^B)^T\ B^{-1} A, \tag{5.5}$$

corespunzător condiției de optim determinat de natura extremului.

Baza optimă B este admisibilă ($\bar{X}^B \geqslant 0$) și dual admisibilă ($\Delta \geqslant 0$).

Metoda pe care o folosim în studiul reoptimizării constă în :

— determinarea elementelor din tabelul de optim al problemei inițiale care rămîn nemodificate în noua problemă și a posibilităților de valorificare a lor ;

— determinarea elementelor care se modifică și a influenței lor asupra primei categorii.

3. În aplicații ne vom referi la problema

$$\begin{aligned} &max\ (5x_1 + 6x_2) \\ &2x_1 + x_2 \leqslant 8 \\ &x_1 + 2x_2 \leqslant 7 \\ &x_2 \leqslant 3 \\ &x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \end{aligned} \tag{5.6}$$

pe care o rezolvăm integral. Aducem problema la forma standard și aplicăm algoritmul simplex

(5.7)

	B	C^B	D	V_1	V_2	V_1^e	V_2^e	V_3^e
				5	6	0	0	0
	V_1^e	0	8	2	1 ↓	1	0	0
	V_2^e	0	7	1	2	0	1	0
←	V_3^e	0	3	0	[1]	0	0	1
	z_j		0	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$			5	6	0	0	0
	V_1^e	0	5	2 ↓	0	1	0	−1
←	V_2^e	0	1	[1]	0	0	1	−2
	V_2	6	3	0	1	0	0	1
	z_j		18	0	6	0	0	6
	$c_j - z_j$			5	0	0	0	−6
←	V_1^e	0	3	0	0	1	−2	[3] ↓
	V_1	5	1	1	0	0	1	−2
	V_2	6	3	0	1	0	0	1
	z_j		23	5	6	0	5	−4
	$c_j - z_j$			0	0	0	−5	4
	V_3^e	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
	V_1	5	3	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
	V_2	6	2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
	z_j		27	5	6	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	0
	$c_j - z_j$			0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$	0

§ 5.2. MODIFICAREA COEFICIENȚILOR FUNCȚIEI OBIECTIV

În problema (5.2) vectorul C se înlocuiește cu $\tilde{C}$; se obține problema de programare liniară

$$\begin{aligned} &\text{optim } \tilde{C}^T X \\ &AX = D \\ &X \geqslant 0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Restricțiile nu s-au modificat; orice bază admisibilă a problemei inițiale este bază admisibilă a problemei modificate. În particular, programul optim $\bar{X}^B$ al problemei (5.2) este program al problemei (5.8).

Diferențele $c_j - z_j^B$ date de (5.5) devin

$$\tilde{\Delta} = \tilde{C}^T - (\tilde{C}^B)^T B^{-1} A, \tag{5.9}$$

iar valoarea funcției obiectiv pentru programul $\bar{X}^B$ este

$$\tilde{z}^B = (\tilde{C}^B)^T B^{-1} D.$$

Dacă $\tilde{\Delta}$ corespunde condiției de extrem, baza B este dual admisibilă și programul $\bar{X}^B$ este optim și pentru problema modificată.

Dacă $\tilde{\Delta}$ nu corespunde condiției de semn impusă de natura extremului, $\bar{X}^B$ nu este program optim; el poate fi îmbunătățit prin aplicarea algoritmului simplex primal.

În aplicații, în tabelul optim al problemei inițiale se înlocuiește linia C de deasupra tabelului cu $\tilde{C}$, coloana C^B cu $\tilde{C}^B$ și se calculează $\tilde{z}_j$ și $\tilde{c}_j - \tilde{z}_j$, $j = 1 \div n$.

Aplicație. Să se reoptimizeze problema (5.6), dacă funcția obiectiv este

$$\tilde{z} = 3x_1 + x_2.$$

Soluție. Înlocuim în ultimul tabel din (5.7) pe $C = (5 \quad 6)^T$ cu $\tilde{C} = (3 \quad 1)^T$ și avem succesiv:

	B	$\tilde{C}^B$	D	3 V_1	1 V_2	0 V_1^e	0 V_2^e	0 V_3^e
	V_3^e	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$ ↓	1
	V_1	3	3	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
←	V_2	1	2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{2}{3}}$	0
	$\tilde{z}_j$		11	3	1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
	$\tilde{c}_j - \tilde{z}_j$			0	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
	V_3^e	0	3	0	1	0	0	1
	V_1	3	4	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
	V_2^e	0	3	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0
	z_j		12	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0
	$c_j - z_j$			0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	0

Programul optim este $\bar{X}^B = (4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$, iar al problemei inițiale $\bar{x}_1 = 4$, $\bar{x}_2 = 0$; optimul este egal cu 12.

§ 5.3. MODIFICAREA VECTORULUI TERMENILOR LIBERI AL RESTRICȚIILOR

În problema (5.2) vectorul D se înlocuiește cu $\tilde{D}$; se obține o nouă problemă de programare liniară

$$\begin{aligned} &\textit{optim } C^T X \\ &AX=\tilde{D} \\ &X\geqslant 0. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Matricea A și vectorul C rămînînd neschimbați baza optimă B este bază și în (5.10), iar diferențele $c_j-z_j^B$ rămîn nemodificate; în noua problemă B este o bază dual admisibilă.

Variabilele de bază din soluția corespunzătoare bazei B în noua problemă date de (5.3) sînt

$$\tilde{X}^B=B^{-1}\tilde{D}.$$

Dacă $B^{-1}\tilde{D}\geqslant 0$, baza B este bază admisibilă și programul este optim.

Dacă $B^{-1}\tilde{D}\ngeq 0$, baza B nu este baza admisibilă; fiind însă dual-admisibilă putem aplica algoritmul simplex dual.

Pentru rezolvarea practică a problemei, citim din ultimul tabel simplex al problemei (5.2) inversa B^{-1} a bazei B, calculăm $B^{-1}\tilde{D}$ și dacă există $d_l^B<0$, modificăm în tabel coloana D și trecem la o nouă iterație.

Aplicație. Să se reoptimizeze problema (5.6) dacă restricțiile sînt

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2&\leqslant 10 \\ x_1+2x_2&\leqslant 9 \\ x_2&\leqslant 1. \end{aligned}$$

Soluție. În problema (5.6) s-a modificat vectorul $D=(8\quad 7\quad 3)^T$ cu $\tilde{D}=(10\quad 9\quad 1)^T$.

În (5.7) baza optimă este $B=(V_3^e\quad V_1\quad V_2)$ și inversa ei este

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

și

$$B^{-1}\tilde{D}=\left(-\frac{5}{3}\quad \frac{11}{3}\quad \frac{8}{3}\right)^T.$$

Scanned with OKEN Scanner

Baza B nu este admisibilă. Înlocuim în ultimul tabel din (5.7) în coloana D pe $B^{-1}D$ cu $B^{-1}\tilde{D}$.

				5	6	0	0	0
	B	C_B	$\tilde{D}$	V_1	V_2	V_1^e	V_2^e	V_3^e
←	$-V_3^e$	0	$-\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\boxed{-\frac{2}{3}}$ ↓	1
	V_1	5	$\frac{11}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
	V_2	6	$\frac{8}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
	z_j		$\frac{103}{3}$	5	6	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	0
	z_j-c_j			0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$	0
	V_2^e	0	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$
	V_1	5	$\frac{9}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
	V_2	6	1	0	1	0	0	1
	z_j		$\frac{57}{2}$	5	6	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{7}{2}$
	c_j-z_j			0	0	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{7}{2}$

Programul optim al problemei sub formă standard este $\tilde{x}_1=\frac{9}{2}$; $\tilde{x}_2=1$, $\tilde{x}_1^e=0$, $\tilde{x}_2^e=\frac{5}{2}$, $\tilde{x}_3^e=0$.

§ 5.4. MODIFICAREA UNUI VECTOR COLOANĂ AL MATRICEI RESTRICȚIILOR

Presupunem că în matricea A a restricțiilor problemei (5.2) vectorul V_k se înlocuiește cu $\tilde{V}_k$. Distingem două cazuri:

a) vectrul $V_k \notin B$, B fiind baza optimă a problemei (5.2);

b) vectorul $V_k \in B$.

a) Dacă $V_k \notin B$, coordonatele lui $\tilde{V}_k$ în baza B sînt date de

$$\tilde{V}_k^B = B^{-1}\tilde{V}_k$$

şi în tabelul optim al problemei (5.2) se înlocuieşte coloana V_k cu coloana vectorului $\tilde{V}_k^B$. Se calculează diferenţa $c_k - \tilde{z}_k^B$ şi dacă ea corespunde condiţiei de optim programul $\bar{X}^B$ este optim şi pentru problema modificată. În caz contrar, se aplică algoritmul simplex primal introducînd în bază vectorul $\tilde{V}_k$.

b) Dacă $V_k \in B$ se calculează $\tilde{V}_k^B$ şi se înlocuieşte în tabelul optim coloana lui V_k. În acest condiţii, pentru a menţine matricea unitate în cadrul tabelul introducem un vector artificial $X_k^a = V_k^B$ pe care-l eliminăm din bază. Eliminarea se poate face calculînd $min\ x_k^a$ (metoda celor două faze) sau introducînd în bază orice vector V_i din A pentru care $a_{ki}^B > 0$. Dacă coordonata de rang k a vectorului $\tilde{V}_k^B$ este pozitivă, introducerea lui $\tilde{V}_k^B$ în bază prezintă avantajul surprinderii încă din primul tabel al reoptimizării a unor consecinţe ale modificării făcute.

Dacă eliminarea lui X_k^a din bază nu este posibilă problema modificată nu admite programe sau rang $A < m$.

Observaţii. 1. Cazul b) poate fi adus la primul, considerînd una din iteraţile în care V_k nu aparţine bazei, dar numai dacă introducerea lui V_k în bază a avut loc spre finalul rezolvării problemei iniţiale.

2. Cele două cazuri tratate rezolvă şi problema modificării mai multor vectori coloană ai matricei restricţiilor.

Aplicaţie. Să se reoptimizeze problema (5.6) dacă restricţiile sînt

$$x_1 + 4x_2 \leqslant 8$$

$$x_1 + 5x_2 \leqslant 7$$

$$x_2 \leqslant 3.$$

Soluţie. Vectorul $V_2 = (1\ \ 2\ \ 1)^T$ din (5.6) este înlocuit cu $\tilde{V}_2 = (4\ \ 5\ \ 1)^T$. Avem

$$B^{-1}\tilde{V}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuim în ultimul tabel din (5.7) pe V_2^B cu $\tilde{V}_2^B$ și adăugăm vectorul artificial $X_2^a=(0\ \ 0\ \ 1)^T$. Aplicăm metoda celor două faze; pentru a avea posibilitatea continuării iterațiilor scriem deasupra tabelului și vectorul C^T.

				0	0	0	0	0	1
				5	6	0	0	0	—
	B	C^B	D	V_1	$\tilde{V}_2$	V_1^e	V_2^e	V_3^e	X_2^a
	V_3^e	0	1	0	−1 ↓	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0
	V_1	0	3	1	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0
←	$-X_2^a$	1	2	0	[2]	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1
	z_j		2	0	2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1
	c_j-z_j			0	−2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0
	V_3^e	0	2	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$ ↓	1	
	V_1	5	2	1	0	$\frac{5}{6}$	$-\frac{2}{3}$	0	
←	$-\tilde{V}_2$	6	1	0	1	$-\frac{1}{6}$	[$\frac{1}{3}$]	0	
	z_j		16	5	6	$\frac{19}{6}$	$-\frac{4}{3}$	0	
	c_j-z_j			0	0	$-\frac{19}{6}$	$\frac{4}{3}$	0	
	V_3^e	0	3	0	1	0	0	1	
	V_1	5	4	1	2	$\frac{1}{2}$	0	0	
	V_2^e	0	3	0	3	$-\frac{1}{2}$	1	0	
	z_j		20	5	10	$\frac{5}{2}$	0	0	
	c_j-z_j			0	−4	$-\frac{5}{2}$	0	0	

Programul optim este $\bar{x}_1=4$, $\bar{x}_2=\bar{x}_1^e=0$, $\bar{x}_2^e=3$, $\bar{x}_3^e=3$.

Observație. Rezolvarea problemei prin metoda dată comportă un volum apreciabil de calcule. Explicația constă în faptul că pentru problema dată modificarea vectorului V_2 este echivalentă cu modificarea jumătății coeficienților matricei A.

Scanned with OKEN Scanner

§ 5.5. ADĂUGAREA UNEI VARIABILE SUPLIMENTARE

În problema (5.2) adăugăm în restricţii o variabilă x_{n+1} ai cărei coeficienţi formează vectorul coloană V_{n+1} şi căreia îi corespunde în funcţia obiectiv coeficientul c_{n+1}. Problema devine

$$\begin{aligned} &max\ (C^T X + c_{n+1}\ x_{n+1}) \\ &AX + V_{n+1}\ x_{n+1} = D \\ &X \geqslant 0,\ x_{n+1} \geqslant 0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

În limbajul problemei de planificare a producţiei, problema modificată reprezintă testarea rentabilităţii introducerii în producţie a unui nou produs, pentru care cunoaştem consumurile specifice şi beneficiul unitar.

Fie B baza optimă a problemei (5.2) şi $\bar{X}^B$ programul ei optim. Ultimul tabel simplex al problemei se modifică ; în condiţiile problemei modificate se adaugă vectorul V_{n+1} exprimat în baza B.

Dacă $c_{n+1} - C^B B^{-1} V_{n+1}$ corespunde condiţiei de optim $\bar{X}^B$ rămîne program optim şi pentru problema modificată ; introducerea în producţie a noului produs nu este rentabilă.

Dacă $c_{n+1} - C^B B^{-1} V_{n+1}$ nu corespunde condiţiei de optim programul $\bar{X}^B$ poate fi îmbunătăţit prin introducerea în bază a vectorului V_{n+1} ; noul produs sporeşte beneficiul întreprinderii.

Aplicaţie. Să se rezolve problema de programare liniară

$$\begin{aligned} &max\ (5x_1 + 6x_2 + 13x_3) \\ &2x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 8 \\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 7 \\ &x_2 + 2x_2 \leqslant 3 \\ &x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Soluţie. Problema dată se obţine din problema (5.6) prin adăugarea variabilei x_3, ai cărei coeficienţi formează vectorul $V_3 = (3\ \ 3\ \ 2)^T$ şi a termenului $10x_3$ în funcţia obiectiv.

Expresia vectorului V_3 în baza optimă a problemei (5.6) este

$$V_3^B = B^{-1} V_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece

$$c_3 - (C^B)^T B^{-1} V_3 = 13 - 11 = 2 > 0,$$

programul optim al problemei iniţiale poate fi îmbunătăţit. Adăugăm în tabelul optim din (5.7) vectorul V_3^B şi coeficientul $c_3 = 13$ al funcţiei obiectiv.

Scanned with OKEN Scanner

			5	6	13	0	0	0
B	C^B	D	V_1	V_2	V_3	V_1^e	V_2^e	V_3^e
← V_3^e	0	1	0	1	[1] ↓	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
V_1	5	3	1	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
V_2	6	2	0	1	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
V_3	13	1	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
V_1	5	2	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1
V_2	6	1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	-1
z_j		29	5	6	13	2	1	2
c_j-z_j			0	0	0	-2	-1	-2

Programul optim al problemei este $(2\ \ 1\ \ 1)^T$; el verifică strict cele trei restricţii deoarece toate cele trei variabile ecart sînt nule.

§ 5.6. ADĂUGAREA UNEI RESTRICŢII

Să adăugăm problemei (5.2) restricţia suplimentară

(5.12) $$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=\alpha.$$

Pentru problema modificată fiecare tabel simplex conţine o linie în plus. În matricea A din primul tabel apare vectorul unitar E_{m+1} corespunzător unei variabile artificiale x^a_{n+1} sau unei variabile ecart dacă restricţia (5.12) este o inecuaţie cu sensul „$\leqslant$” şi $\alpha>0$. Dacă variabila x^a_{n+1} nu se introduce în bază, în fiecare iteraţie a problemei modificate în dreptul matricei unitate din primul tabel simplex apare inversa bazei iniţiale.

Dacă B este baza optimă a problemei iniţiale, inversa bazei $\tilde{B}$ a problemei modificate corespunzătoare ultimului tabel simplex se obţine din inversarea matricei

(5.13) $$\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline V & 1 \end{array}\right),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde V este vectorul linie $1 \times m$ format cu coeficienții $\alpha_i \in B$ din restricția suplimentară (5.12). Inversa matricei (5.13) calculată în (I, § 1.5) este

$$\tilde{B}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & 0 \\ \hline -VB^{-1} & 1 \end{array}\right). \tag{5.14}$$

Calculăm VB^{-1}; cunoașterea inversei bazei permite completarea tabelului simplex al problemei modificate. Un vector $\tilde{V}_i = (V_i \mid \alpha_i)^T$ din tabelul inițial în ultimul tabel devine

$$\tilde{B}^{-1}\tilde{V}_i = \left(\begin{array}{c} V_i^B \\ \hline \alpha_i - VB^{-1}V_i \end{array}\right). \tag{5.15}$$

Din (5.15) rezultă primele m linii din tabelul optim al problemei inițiale rămîn nemodificate și se adaugă o linie formată din elementele $-VB^{-1}$ în dreptul matricei optime B și din

$$\alpha_i - VB^{-1}V_i = \alpha_i - VV_i^B \tag{5.16}$$

pentru $i \notin B$. Relația (5.16) se aplică și pentru vectorul D. Soluția problemei modificate corespunzător bazei $\tilde{B}$ este $\tilde{X}^B = (D^B \mid \alpha - VD^B)$, unde

$$\alpha - VD^B = \alpha - \sum_{i \in B} \alpha_i d_i^B. \tag{5.17}$$

Dacă E_{m+1} din primul tabel simplex corespunde unei variabile ecart și $\alpha \geqslant \sum_{i \in B} \alpha_i d_i^B$ programul $\bar{X}^B$ este optim și pentru problema modificată. În caz contrar se aplică algoritmul simplex dual. Din punct de vedere economic rezultă că, adăugarea unei restricții suplimentare conduce la micșorarea, în cel mai bun caz menținerea, rentabilității procesului economic modelat.

Adăugarea unui număr finit de restricții comportă aplicarea succesivă a transformărilor (5.16) pentru fiecare restricție.

Aplicație. Să se reoptimizeze problema (5.6) dacă se adaugă restricția

$$5x_1 + 4x_2 \leqslant 20.$$

Soluție. În forma standard restricția devine

$$5x_1 + 4x_2 + x_4' = 20.$$

Din tabelul optim al problemei (5.7) rezultă că $V = (0 \quad 5 \quad 4)$ și

$$-VB^{-1} = -(0 \quad 5 \quad 4) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} = (-2 \quad -1 \quad 0).$$

Scanned with OKEN Scanner

Matricea inversă a problemei modificate este

$$\tilde{B}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Singurul vector care trebuie exprimat în baza $\tilde{B}$ este $\tilde{D}=(8 \quad 7 \quad 3 \quad 20)^T$

$$\tilde{B}^{-1}\tilde{D}=(1 \quad 3 \quad 2 \quad -3)^T.$$

Primele trei sînt coordonatele vectorului D^B, iar ultima se putea obține și din (5.17) cu $\alpha_1=5, \alpha_2=4, \alpha_3^e=0$.

Adăugăm ultimului tabel din (5.7) linia a patra și aplicăm algoritmul simplex dual.

				5	6	0	0	0	0
	B	C_B	D	V_1	V_2	V_1^e ↓	V_2^e	V_3^e	V_4^e
	V_3^e	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0
	V_1	5	3	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0
	V_2	6	2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
←	$-V_4^e$	0	−3	0	0	$\boxed{\lvert -2 \rvert}$	−1	0	1
	z_j		27	5	6	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	0
	c_j-z_j			0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$	0	0
	V_3^e	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{5}{7}$	1	$\frac{1}{6}$
	V_1	5	2	1	0	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
	V_2	6	$\frac{5}{2}$	0	1	0	$\frac{5}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$
	V_1^e	0	$\frac{3}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
	z_j		25	5	6	0	$\frac{25}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
	c_j-z_j			0	0	0	$-\frac{25}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$

Programul optim al problemei sub formă standard este $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_1^* = \frac{3}{2}$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = \frac{1}{2}$, $x_4^* = 0$, iar al problemei inițiale $\bar{x}_1 = 2$, $\bar{x}_2 = \frac{5}{2}$.

§ 5.7. MODIFICAREA MATRICEI COSTURILOR ÎN PROBLEMA TRANSPORTURILOR

Fie problema de transport echilibrată

$$\min F(X) = \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1 \div m$$

(5.18)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1 \div n$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad \forall i = 1 \div m, \forall j = 1 \div n.$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Modificarea costurilor c_{ij} nu afectează decît funcția obiectiv. Dacă $\tilde{c}_{ij}$ sînt noile costuri, funcția obiectiv devine

$$\tilde{F}(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{ij} x_{ij}.$$

Programul optim $\bar{X}$ al problemei inițiale este program și al problemei modificate. Se calculează u_i și v_j din sistemul

$$u_i + v_j = \tilde{c}_{ij}, \quad x_{ij} \in B$$

și matricele $\tilde{C}^*$ și $\tilde{G}$.

Dacă $\tilde{G} \geqslant 0$ programul $\bar{X}$ este optim și pentru problema modificată.

Dacă $\exists \tilde{g}_{ij} < 0$ programul $\bar{X}$ nu este optim și se trece la îmbunătățirea lui.

Observații. 1. Metoda folosită în problemele de transport cu rute interzise este în fond o modificare a matricei costurilor deoarece înlocuim costurile inițiale corespunzătoare acestor rute cu valori arbitrare, mai mari decît celelalte costuri.

Scanned with OKEN Scanner

2. Dacă în problema (5.18) modificăm disponibilul și necesarul astfel ca problema să rămînă echilibrată și păstrăm matricea costurilor, pentru problema modificată se poate construi o soluție $\tilde{X}$ după legea de formare a programului optim al problemei inițiale.

Soluția $\tilde{X}$ este programul optim al problemei modificate dacă $X \geqslant 0$.

Aplicații. 1. Să se rezolve problema de transport

(5.19)

F \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	D
F_1	2	3	5	4	250
F_2	6	6	4	4	225
F_3	7	6	8	8	125
N	100	150	200	150	600 / 600

Să se reoptimizeze dacă costurile unitare corespunzătoare transporturilor la beneficiarul B_3 sînt $(6 \quad 7 \quad 6)^T$.

Soluție. Tabelul de optim al problemei, cu valorile pozitive ale diferențelor g_{ij}, este

(5.20)

$\bar{X}$					C^*				G				Concluzii
					2	3	4	4					
100	25		125	0	(2)	(3)	5 / 4	(4)	(0)	(0)	+	(0)	
		200	25	0	6 / 2	6 / 3	(4)	(4)	+	+	(0)	(0)	optim
	125			3	7 / 5	(6)	8 / 7	8 / 7	+	(0)	+	+	

$F(\bar{X}) = 2\,425.$

Înlocuim în C^* noile valori c_{ij} corespunzătoare variabilelor din bază și testăm programul $\bar{X}$.

Scanned with OKEN Scanner

$\bar{X}$				u_i \ v_j	C^* 2	3	7	4	G				Concluzii
100	25 +		125 −	0	(2)	(3)	6/7	(4)	0	0	(−1)	0	
		200 −	25 +	0	6/2	6/3	(7)	(4)	+	+	(0)	(0)	$\inf\{g_{ij}\}=-4$ $\rho=125$
	125 −	+		3	7/5	(6)	6/10	8/7	+	(0)	−4	+	
$F(\bar{X})=3\,025$					2	3	7	4					
100	150	+	0 −	0	(2)	(3)	6/7	(4)	0	0	(−1)	0	
		75 −	150 +	0	6/2	6/3	(7)	(4)	+	+	(0)	(0)	$\inf\{g_{ij}\}=-1$ $\rho=0$
		125		−1	7/1	6/2	(6)	8/3	+	+	0	+	
$F(\bar{X})=2\,525$					2	3	6	3					
100	150	0		0	(2)	(3)	(6)	4/3	0	0	0	+	
		75	150	1	6/3	6/4	(7)	(4)	+	+	(0)	(0)	optim
		125		0	7/2	6/3	(6)	8/3	+	+	(0)	+	

$F(\bar{X})=2\,525$.

Ultimul program, cel optim, s-a obținut din programul anterior printr-un transfer de zero esențial.

2. Să se rezolve problema de transport

F \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	D
F_1	2	3	5	4	175
F_2	6	6	4	4	200
F_3	7	6	8	8	150
N	50	200	175	100	525 / 525

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie. Matricele costurilor problemei date şi a problemei (5.19) coincid. Baza optimă a problemei (5.19) este baza dual admisibilă pentru problema dată.

Construim soluţia $\tilde{X}$ după modelul programului $\bar{X}$; pe prima coloană cu costul 2, pe coloana treia cu costul 4, pe linia treia cu costul 6, transportăm cantităţile maxime posibile

50	50		75
		175	25
	150		

completarea celorlalte căsuţe este imediată. Programul este optim deoarece toate variabilele sînt nenegative.

6. ELEMENTE DE PROGRAMARE LINIARĂ PARAMETRICĂ

§ 6.1. PARAMETRIZAREA COEFICIENȚILOR FUNCȚIEI DE EFICIENȚĂ

Considerăm problema de programare liniară

$$\min z(\lambda)=\min \sum_{j=1}^{n} c_j(\lambda)\, x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = d_i, \qquad i=1 \div m \tag{6.1}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad \forall j=1 \div n.$$

unde $c_j(\lambda)$ sînt funcții liniare de parametrul real λ. Ne propunem să determinăm mulțimea programelor optime ale problemei cînd $\lambda \in (\alpha, \beta)$.

Fie $\lambda_0 \in (\alpha, \beta)$. Rezolvăm problema (6.1) cu $\lambda=\lambda_0$ și fie X_1 programul de bază optim. În tabelul optim modificăm funcția obiectiv înlocuind $C(\lambda_0)$ prin $C(\lambda)$. Calculăm diferențele

$$\Delta_j^1 = c_j^1 - z_j^1$$

și punem condiția ca ele să corespundă extremului. Se obține sistemul de inecuații liniare în λ

$$c_j^1(\lambda) - z_j^1(\lambda) \geqslant 0, \qquad j \notin B_1, \tag{6.2}$$

unde B_1 este baza optimă corespunzătoare programului X_1.

Scanned with OKEN Scanner

Mulțimea soluțiilor sistemului (6.2) nu este vidă, deoarece admite soluția $\lambda=\lambda_0$. Fie $[\lambda_1, \lambda_2]$ soluția sistemului. Pentru $\lambda\in[\lambda_1, \lambda_2]$ programul X_1 este program optim al problemei (6.1).

Dacă $\lambda_2<\beta$, considerăm o valoare $\lambda^*>\lambda_2$, apropiată de λ_2 ; cel puțin una din diferențele Δ_j^1 devine negativă. Aplicăm criteriul de intrare în bază, introducînd în bază vectorul V_k pentru care $\Delta_k^1=inf\ \{\Delta_j^1\}$, (dacă $\lambda_2-\lambda^*$ este suficient de mic, mulțimea $\{\Delta_j^1\}$ are un singur element). Se obține un program X_2 și punem condiția ca el să fie optim. Obținem un nou sistem de inecuații

$$c_j^2(\lambda)-z_j^2(\lambda)\geqslant 0, \qquad j\notin B_2,$$

a cărui soluție este $[\lambda_2, \lambda_3]$. Pentru $\lambda\in[\lambda_2, \lambda_3]$, X_2 este program optim al problemei (6.1).

Dacă $\lambda_3\geqslant\beta$ am încheiat rezolvarea pentru $\lambda\in[\lambda_1, \beta]$, adică pentru $\lambda>\lambda_2$. Procedăm în mod analog pentru $\lambda<\lambda_1$.

Dacă $\lambda\in R$, numărul bazelor posibile ale problemei date fiind limitat, după un număr finit de iterații acoperim întreaga dreaptă. Valorile λ_i determinate în fiecare iterație se numesc *valori critice*, iar $[\lambda_i, \lambda_j]$ *intervale critice* ale problemei.

Aplicație. Să se rezolve problema de programare liniară

$$max\ [(5+\lambda)x_1+(6-\lambda)x_2]$$
$$2x_1+x_2\leqslant 8$$
$$x_1+2x_2\leqslant 7$$
$$x_2\leqslant 3$$
$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \lambda\in R.$$

Soluție. Pentru $\lambda=0$ obținem problema (5.6). Modificăm funcția obiectiv, în tabelul optim al problemei și calculăm diferențele c_j-z_j. Din condiția de optim rezultă sistemul de inecuații :

$$-\left(\lambda+\frac{4}{3}\right)\leqslant 0, \qquad \lambda-\frac{7}{3}\leqslant 0$$

cu soluția $\lambda\in\left[-\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right]$ interval care cuprinde pe $\lambda=0$. Programul optim este $(3\quad 2)^T$, iar valoarea funcției obiectiv $27+\lambda$.

Pentru $\lambda>\frac{7}{3}$, $\Delta_2^e<0$; introducem vectorul V_2^e în bază și procedăm în mod analog.

Transcriem complet rezolvarea problemei, numerotînd tabelele simplex și vom da explicații la sfîrșit.

Scanned with OKEN Scanner

				$5+\lambda$	$6-\lambda$	0	0	0	
	B	C_B	D	V_1	V_2	V_1^e	V_2^e	V_3^e	
	V_3^e	0	1	0	0	$\boxed{\frac{1}{3}}$	$-\frac{2}{3}$	1	
	V_1	$5+\lambda$	3	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	(I)
←	V_2	$6-\lambda$	2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{2}{3}}$	0	
	z_j		$27+\lambda$	$5+\lambda$	$6-\lambda$	$\lambda+\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}-\lambda$	0	
	c_j-z_j			0	0	$-\left(\lambda+\frac{4}{3}\right)$	$\lambda-\frac{7}{3}$	0	
	V_3^e	0	3	0	1	0	0	1	
	V_1	$5+\lambda$	4	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	(II)
	V_2^e	0	3	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	
	z_j		$4(5+\lambda)$	$5+\lambda$	$\frac{1}{2}(5+\lambda)$	$\frac{1}{2}(5+\lambda)$	0	0	
	c_j-z_j			0	$\frac{1}{2}(7-3\lambda)$	$-\frac{1}{2}(5+\lambda)$	0	0	
	V_1^e	0	3	0	0	1	−2	3	
←	V_1	$5+\lambda$	1	1	0	0	$\boxed{1}$	−2	(III)
	V_2	$6-\lambda$	3	0	1	0	0	1	
	z_j		$23-2\lambda$	$5+\lambda$	$6-\lambda$	0	$5+\lambda$	$-4-3\lambda$	
	c_j-z_j			0	0	0	$-(\lambda+5)$	$3\lambda+4$	
	V_1^e	0	5	2	0	1	0	−1	
	V_2^e	0	1	1	0	0	1	−2	(IV)
	V_2	$6-\lambda$	3	0	1	0	0	1	
	z_j		$3(6-\lambda)$	0	$6-\lambda$	0	0	$6-\lambda$	
	c_j-z_j			$5+\lambda$	0	0	0	$\lambda-6$	

În tabelul II condiția de optim conduce la $\lambda \geqslant \frac{7}{3}$ și am încheiat testarea pentru $\lambda > 0$.

Ne reîntoarcem la tabelul I pentru a testa valorile $\lambda < 0$. Pentru $\lambda < 0$, $\Delta_1^e > 0$. Introducem în bază pe V_1^e și obținem $\lambda \in \left[-5, -\frac{4}{3}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $\lambda<-5$, în tabelul III, $\Delta_2^c>0$. Obținem tabelul:

λ	Programul optim	$max\ z\ (\lambda)$
$\lambda<-5$	$(0\quad 3)^T$	$3\,(6-\lambda)$
$\lambda=-5$	$(0\quad 3)^T$ $(1\quad 3)^T$	33
$\lambda\in\left(-5, -\frac{4}{3}\right)$	$(1\quad 3)^T$	$23-2\lambda$
$\lambda=-\frac{4}{3}$	$(1\quad 3)^T$ $(3\quad 2)^T$	$\frac{77}{3}$
$\lambda\in\left(-\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$	$(3\quad 2)^T$	$27+\lambda$
$\lambda=\frac{7}{3}$	$(3\quad 2)^T$ $(4\quad 0)^T$	$\frac{88}{3}$
$\lambda>\frac{7}{3}$	$(4\quad 0)^T$	$4\,(5+\lambda)$

Pentru $\lambda=-5$, $\lambda=-\frac{4}{3}$, $\lambda=\frac{7}{3}$ problema admite o infinitate de soluții. Ele reprezintă valorile critice ale problemei

§ 6.2. PARAMETRIZAREA TERMENILOR LIBERI AI RESTRICȚIILOR

Fie problema de programare liniară

$$\begin{aligned} &min\ C^TX \\ &AX=D\ (\lambda) \\ &X\geqslant 0, \end{aligned} \tag{6.3}$$

unde $\lambda\in(\alpha, \beta)$, iar $d_i\ (\lambda)$ sînt funcții liniare de parametrul λ. Ne propunem să determinăm mulțimea programelor optime.

Rezolvăm problema pentru o valoare $\lambda_0\in(\alpha, \beta)$ și fie B_1, X_1 baza, respectiv programul de bază optim.

Efectuăm modificarea vectorului $D(\lambda_0)$ cu $D(\lambda)$. Baza B_1 rămîne dual admisibilă şi punem condiţia ca ea să fie şi admisibilă. Din

$$d_i^{B_1}(\lambda) \geqslant 0, \quad i \in B_1 \tag{6.4}$$

se determină un interval $[\lambda_1, \lambda_2] \ni \lambda_0$ pentru care $d_i^{B_1}$ reprezintă coordonatele de bază ale programului optim.

Atribuim lui λ o valoare $\lambda^* > \lambda_2$, apropiată de λ_2; una din coordonatele $d_i^{B_1}$ devine negativă şi aplicăm algoritmul simplex dual. Se obţine o nouă bază dual admisibilă. Rezolvăm sistemul analog lui (6.4) şi determinăm un nou interval $[\lambda_2, \lambda_3]$.

Procedăm în mod analog pînă la testarea intervalului (α, β).

Aplicaţii. 1. Să se rezolve problema de programare liniară

$$max \ (5x_1+6x_2)$$

$$2x_1+ \ x_2 \leqslant 8-4\lambda$$

$$x_1+2x_2 \leqslant 7-5\lambda$$

$$x_2 \leqslant 3-\lambda$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad \lambda \geqslant 0.$$

Soluţie. Pentru $\lambda=0$ se obţine problema (5.6). Efectuăm schimbarea lui $D(0)=(8 \quad 7 \quad 3)^T$ cu $D(\lambda)=(8-4\lambda \quad 7-5\lambda \quad 3-\lambda)^T$. Avem

$$B^{-1}D(\lambda)=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8-4\lambda \\ 7-5\lambda \\ 3-\lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 3-\lambda \\ 2-2\lambda \end{pmatrix}.$$

Punem condiţia $B^{-1}D(\lambda) \geqslant 0$ şi

$$1+\lambda \geqslant 0, \quad 3-\lambda \geqslant 0, \quad 2-2\lambda \geqslant 0 \Rightarrow \lambda \in [-1, \ 1].$$

Pentru $\lambda \in [0, \ 1]$ programul optim al problemei date este $X_1=(3-\lambda \quad 2-2\lambda)^T$; el verifică strict primele două restricţii. Optimul este $z(X_1)=27-17\lambda$.

Atribuim lui λ o valoare $\lambda>1$, de exemplu $\lambda=2$. Coordonata d_3^B devine negativă; aplicăm algoritmul simplex dual. Vectorul V_2 părăseşte baza şi vectorul V_1^e intră în bază. Obţinem succesiunea de tabele:

Scanned with OKEN Scanner

			5	6	0	0	0	
B	C^B	D	V_1	V_2	V_1^e	V_2^e	V_3^e	
V_3^e	0	$1+\lambda$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	
V_1	5	$3-\lambda$	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	(I)
← V_2	6	$2-2\lambda$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	
$z_j=$		$27-17\lambda$	5	6	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	
c_j-z_j			0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$	0	
V_3^e	0	$3-\lambda$	0	1	0	0	1	
V_1	5	$7-5\lambda$	1	2	0	1	0	(II)
V_1^e	0	$6(\lambda-1)$	0	−3	1	−2	0	
z_j		$5(7-5\lambda)$	5	10	0	5	0	
c_j-z_j			0	−4	0	−5	0	

Punem condiția (Tabelul II) ca noua soluție să fie program :

$$3-\lambda\geqslant 0,\ 7-5\lambda\geqslant 0,\ 6(\lambda-1)\geqslant 0\Rightarrow\lambda\in\left[1,\frac{7}{5}\right].$$

Dăm lui λ o valoare $\lambda>\frac{7}{5}$, de exemplu $\lambda=2$; rezultă $d_1<0$. Toate elementele liniei a doua din A sînt nenegative și problema nu admite programe.

Dealtfel, pentru $\lambda>\frac{7}{5}$ a doua restricție nu poate fi verificată de $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$.

Pentru valoarea critică $\lambda=1$ programul de bază este $(2\quad 0)^T$ și optimul 10, valori ce se obțin din ambele tabele.

Pentru $\lambda=\frac{7}{5}$ programul optim este $(0\quad 0)^T$ și optimul este nul. A doua restricție este $x_1+2x_2=0$ cu $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$.

2. Prezentăm un exemplu de parametrizare a termenilor liberi ai restricțiilor cu doi parametri, rezolvînd problema de programare liniară

$$\begin{aligned} &max\ (5x_1+6x_2)\\ &2x_1+x_2\leqslant\lambda+8\\ &x_1+2x_2\leqslant\mu+7\\ &x_2\leqslant 3\\ &x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0, \end{aligned}$$

unde $\lambda\in[0,\ 12]$ și $\mu\in[0,\ 9]$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Pentru $\lambda=0$, $\mu=0$ se obține problema (5.6). Modificînd pe $D\,(0,\ 0)=(8\ \ 7\ \ 3)^T$ prin $D\,(\lambda,\ \mu)=(\lambda+8\quad \mu+7\quad 3)^T$, obținem

$$D^B(\lambda,\ \mu)=B^{-1}D\,(\lambda,\ \mu)=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{6}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda+8 \\ \mu+7 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\lambda-2\mu+3}{3} \\ \frac{2\lambda-\mu+9}{3} \\ \frac{-\lambda+2\mu+6}{3} \end{pmatrix}.$$

Punem condițiile $D^B\,(\lambda,\ \mu)\geqslant 0$ în ipoteza $\lambda\in[0,\ 12]$, $\mu\in[0,\ 9]$ și obținem un sistem de inecuații a cărui soluție este mulțimea M_1 din figura 6.1. Pentru $\forall\,(\lambda,\ \mu)\in M_1$ problema admite programul optim : $\bar{X}_1\left(\frac{2\lambda-\mu+9}{3}\quad \frac{-\lambda+2\mu+6}{3}\quad 0\right.$

$\left.0\quad \frac{\lambda-2\mu+3}{3}\right)^T$, optimul problemei fiind $z\,(\bar{X}_1)=\frac{4\lambda+7\mu+81}{3}$.

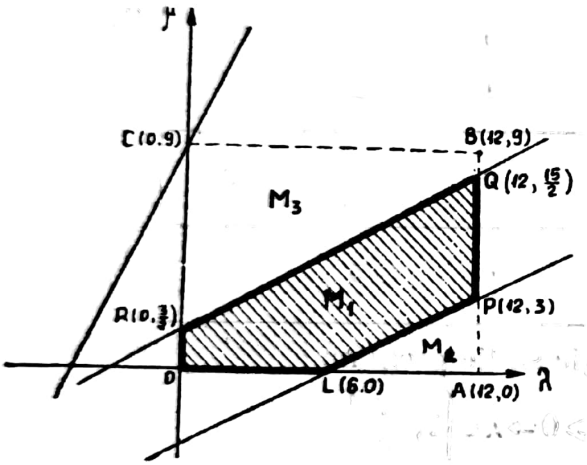


Fig. 6.1.

Dacă $(\lambda,\ \mu)\in M_2 \Rightarrow \frac{-\lambda+2\mu+6}{3}<0$ și baza B este dual admisibilă. În ultimul tabel din (5.7) înlocuim coloana D prin $D^B\,(\lambda,\ \mu)$ și continuăm rezolvarea prin algoritmul simplex dual; vectorul V_2 părăsește baza și intră în bază vectorul V_1^e. Se obține

			5	6	0	0	0
B	C^B	D	V_1	V_2	V_1^e	V_2^e	V_3^e
V_3^e	0	$\frac{-4\mu+9}{3}$	0	1	0	0	1
V_1	5	$\mu+7$	1	2	0	1	0
V_1^e	0	$\lambda-2\mu-6$	0	−3	1	−2	0
z_j		$5\mu+35$	5	10	0	5	0
c_j-z_j			0	−10	0	−5	0

Deoarece pentru $(\lambda, \mu) \in M_2$ avem $\lambda-2\mu-6>0$ și $\mu+7>0$, soluția obținută este program dacă $\frac{-4\mu+9}{3}>0$. Rezultă că pentru $(\lambda, \mu) \in M_2$, unde $\mu \in \left]0, \frac{9}{4}\right[$, program optim este

$$\bar{X}_2 \left(\mu+7 \quad 0 \quad \lambda-2\mu-6 \quad 0 \quad \frac{-4\mu+9}{3}\right)^T,$$

iar optimul problemei $z(\bar{X}_2)=5\mu+35$.

Dacă $\frac{9}{4}<\mu<3$, avînd $\frac{-4\mu+9}{3}<0$ și toate elementele din matricea A de pe linia întîi fiind nenegative, problema nu admite programe.

Cînd $(\lambda, \mu) \in M_3$, în $D^B(\lambda, \mu)$ avem $\frac{\lambda-2\mu+3}{3}<0$. Aplicînd algoritmul simplex dual prin schimbarea bazei $(V_2^e\ V_1\ V_2)$ cu baza $(V_2^e\ V_1\ V_2)$ obținem

			5	6	0	0	0
B	C^B	D	V_1	V_2	V_1^e	V_2^e	V_3^e
V_1^e	0	$\frac{-\lambda+2\mu-3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$
V_1	5	$\frac{\lambda+5}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
V_2	6	3	0	1	0	0	1
z_j		$\frac{5\lambda+61}{2}$	5	6	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{7}{2}$
c_j-z_j			0	0	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{7}{2}$

Deoarece în acest caz $-\lambda+2\mu+3>0$ și $\lambda+5>0$, soluția obținută este program optim.

Deci $\forall (\lambda, \mu) \in M_3$, problema admite programul optim:

$$\bar{X}_3 \left(\frac{\lambda+5}{2} \quad 3 \quad 0 \quad \frac{-\lambda+2\mu-3}{2} \quad 0\right)^T \text{ cu } z(\bar{X}_3)=\frac{5\lambda+61}{2}.$$

V. APLICAŢII ALE TEORIEI GRAFURILOR

1. NOŢIUNEA DE GRAF

Apărută ca o ramură a teoriei mulţimilor, dezvoltîndu-se paralel cu algebra modernă, teoria grafurilor şi-a căpătat o valorificare relativ rapidă în domenii destul de variate şi constituie azi un instrument important al cercetării operaţionale.

Intuitiv, un graf este o figură formată din puncte legate între ele prin săgeţi. Punctele simbolizează elemente diferite (în funcţie de fenomenul modelat prin graf): indivizi, colectivităţi, evenimente, acţiuni, operaţii. Săgeţile reflectă legătura ce se stabileşte între elementele considerate. Asemenea figuri se întîlnesc în psihologie (sociograme), fizică (reţele electrice), comunicaţii (reţele de căi rutiere), economie (organigrame), prelucrarea datelor (scheme logice) etc.

În cele ce urmează interesează doar grafuri finite.

Considerăm o mulţime finită $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$ şi o funcţie $F : X \to \mathcal{P}(X)$, care ataşează fiecărui element $x_i \in X$ o submulţime $F(x_i) \in X$.

Se numeşte *graf* cuplul $G=(X, F)$.

Elementele mulţimii X poartă denumirea de *vîrfuri* sau *noduri* ale grafului.

O pereche de vîrfuri (x_i, x_j) formează *arc*, dacă $x_j \in F(x_i)$. În acest fel, în mulţimea $X \times X$ ale perechilor de vîrfuri din graf se evidenţiază submulţimea

$$\mathcal{A}=\{(x_i, x_j) \in X \times X \mid x_j \in F(x_i)\}, \tag{1.1}$$

care constituie mulţimea arcelor grafului $G=(X, F)$.

Este clar că odată cunoscută mulţimea arcelor $\mathcal{A}$, este determinată funcţia F şi deci graful este perfect determinat de cuplul $(X, \mathcal{A})$.

Pentru arcul $(x_i, x_j) \in \mathcal{A}$, x_i este extremitatea iniţială x_j extremitatea finală. Două vîrfuri se zic adiacente, dacă $x_j \in F(x_i)$ sau $x_i \in F(x_j)$. Două arce sînt adiacente dacă au o extremitate comună.

Dacă $x_i \in F(x_i)$, atunci (x_i, x_i) se numeşte *buclă*.

Arcul cu extremitatea iniţială în x_i se numeşte *incident exterior lui* x_i. Mulţimea arcelor incidente exterior lui x_i este

$$\mathcal{A}^*(x_i)=\{(x_i, x_j) \mid x_j \in F(x_i).\} \tag{1.2}$$

Arcul cu extremitatea finală în x_i este *incident interior lui* x_i, iar mulțimea arcelor indicente interior lui x_i se scrie

$$\mathcal{A}^-(x_i)=\{(x_k, x_i) \mid x_i \in F(x_k)\}. \tag{1.3}$$

Dacă graful $G=(X, F)$ are un vîrf $x^0 \in X$ pentru care $\mathcal{A}^-(x^0)=\emptyset$, vîrful x^0 este o *sursă* a grafului. Un vîrf $x^* \in X$ cu $\mathcal{A}^+(x^*)=\emptyset$ este o *destinație* a grafului.

Fie $Y \subset X$; mulțimea arcelor incidente interior mulțimii de vîrfuri Y este

$$\mathcal{A}^-(Y)=\{(x_i, x_j) \in \mathcal{A} \mid x_i \notin Y,\ x_j \in Y\}, \tag{1.4}$$

iar

$$\mathcal{A}^+(Y)=\{(x_i, x_j) \in \mathcal{A} \mid x_i \in Y,\ x_j \notin Y\} \tag{1.5}$$

este mulțimea arcelor incidente exterior mulțimii Y.

Exemplul 1.1. Fie $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ și funcția $F: X \to \mathcal{P}(X)$ definită prin

$$F(x_1)=\{x_2, x_3, x_4\},\ F(x_2)=\{x_1, x_2, x_3\},$$
$$F(x_3)=\{x_2, x_4, x_5, x_6\},\ F(x_4)=\{x_3, x_4, x_5)\},$$
$$F(x_5)=\{x_3\},\ F(x_6)=\Phi.$$

Figurînd vîrfurile grafului $G=(X, F)$ prin puncte și arcele prin linii orientate, se obține imaginea din fig. 1.1.

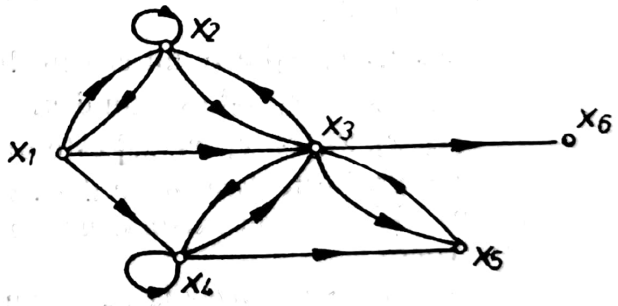


Fig. 1.1.

Se constată: vîrfurile x_1 și x_3 sînt adiacente ($(x_1, x_3) \in \mathcal{A}$), iar x_2 și x_5 nu; arcele (x_1, x_2) și (x_2, x_3) sînt adiacente ca și (x_1, x_2) și (x_1, x_4), dar (x_1, x_3) și (x_4, x_5) nu. Graful conține două bucle: (x_2, x_2) și (x_4, x_4).

Avem $\mathcal{A}^+(x_2)=\{(x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_2, x_3)\}$ și

$$\mathcal{A}^-(x_2)=\{(x_1, x_2), (x_2, x_2), (x_3, x_2)\}.$$

Graful are o destinație, x_6, căci $A^+(x_6)=\emptyset$.

Alegînd $Y=\{x_1, x_3\}$,

$$\mathcal{A}^+(Y)=\{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_3, x_6)\},$$

$$\mathcal{A}^-(Y)=\{(x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_4, x_3), (x_5, x_3)\}.$$

Fie $G=(X, F)$ un graf. Dacă în G se suprimă un număr de arce, se obține un *graf parțial* G' al lui G: $G'=(X, F')$ cu $F'(x_i) \subset F(x_i)$ pentru cel puțin un $x_i \in X$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă în G se elimină un număr de vîrfuri (evident cu arcele incidente acestora), se obține un *subgraf* G^0 al grafului dat :

$$G^0=(X^0, F^0) \text{ cu } X^0 \subset X \text{ și}$$

$$F(x_i)=\begin{cases} \{x_j \in X^0 \mid x_j \in F(x_i)\}, & \text{dacă } x_i \in X^0 \\ \varnothing, & \text{dacă } x_i \notin X^0. \end{cases}$$

Graful $G=(X, \mathcal{A})$ este *simetric* dacă are loc implicația $(x_i, x_j) \in \mathcal{A} \Rightarrow (x_j, x_i) \in \mathcal{A}$.

Subgraful definit pe mulțimea $X^0=\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$ din exemplul 1.1 este un graf simetric.

Graful $G=(X, \mathcal{A})$ este *complet* dacă are loc implicația $(x_i, x_j) \notin \mathcal{A} \Rightarrow (x_j, x_i) \in \mathcal{A}$,
adică dacă între oricare două vîrfuri există cel puțin un arc. Subgraful cu $X^0=\{x_1, x_2, x_3\}$ din exemplul 1.1 este un graf complet.

Numim *drum* într-un graf o succesiune de arce în care extremitatea finală a unui arc coincide cu extremitatea inițială a arcului următor. Drumul în care vîrful final coincide cu vîrful său inițial este un *circuit*.

Un drum este *elementar* dacă nu trece de două ori prin același vîrf și este *simplu* dacă folosește arcele componente o singură dată. Drumul elementar care trece prin toate vîrfurile grafului este un drum *hamiltonian*.

Lungimea unui drum este numărul arcelor componente. În particular, într-un graf cu n vîrfuri, un drum hamiltonian are lungimea $n-1$, iar bucla este un circuit de lungimea 1.

În graful din exemplul 1.1, $[x_1, x_2, x_3, x_6]$ este un drum simplu, elementar de lungime 3 ;

$[x_4, x_5, x_3, x_4]$ este un circuit de lungime 3 ;

$[x_2, x_3, x_4, x_3, x_6]$ este un drum neelementar ;

$[x_4, x_3, x_2, x_5, x_4, x_3, x_6]$ este un drum nesimplu.

Un graf este *tare conex* dacă există cel puțin un drum între oricare două vîrfuri. Deoarece nu există drumuri cu vîrful inițial x_6, graful din fig. 1.1 nu este tare conex.

Se numește *muchie* $[x_i, x_j]$ a grafului $G=(X, \mathcal{A})$ o pereche de vîrfuri aflate la extremitățile unui arc : $[x_i, x_j]$ este muchie dacă $(x_i, x_j) \in \mathcal{A}$ sau (și) $(x_j, x_i) \in \mathcal{A}$. *Lanțul* este o succesiune de muchii adiacente. Un graf este *conex* dacă există cel puțin un lanț între oricare două vîrfuri ale sale.

În figura 1.1 $[x_5, x_4, x_3, x_1]$ este lanț (dar nu este drum). Graful este conex, dar nu tare conex.

Studiul grafelor este ușurat prin asocierea la aceștia a unor matrici. Dintre multiplele posibilități de constituire a unei matrici asociate unui graf $G=(X, F)$ ne rezumăm deocamdată la două.

Presupunem că în graful $G=(X, F)$ sînt n vîrfuri (card $X=n$). Matricea *conexiunilor* (*tranzițiilor*) grafului G este o matrice pătrată de ordinul n, $A=(a_{ij})$, $i, j=1 \div n$ ale cărei elemente se definesc prin

$$a_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{dacă } x_j \in F(x_i) \\ 0, & \text{dacă } x_j \notin F(x_i), \end{cases} \tag{1.6}$$

Matricea *latină* a grafului este o matrice pătrată de ordinul n, $T=(t_{ij})$, $i, j=1 \div n$ cu elementele definite astfel

$$t_{ij}=\begin{cases} i, \ j, & \text{dacă } x_j \in F(X_i) \\ 0, & \text{dacă } x_j \notin F(x_i). \end{cases} \tag{1.7}$$

(Matricea latină nu este numerică. Ea constituie o reprezentare a arcelor grafului sub forma unui tablou cu două intrări.)

Pentru graful din fig. 1.1, cele două matrice definite se scriu sub forma

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T=\begin{bmatrix} 0 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 0 & 0 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,2 & 0 & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\ 0 & 0 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 0 \\ 0 & 0 & 5,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matricea conexiunilor unui graf oferă informații utile privind natura acestuia. Astfel :

— Matricea conexiunilor unui graf simetric este simetrică ($a_{ij}=a_{ji}$).

— Dacă în A, $a_{ij}=0$ și $a_{ji}=1$, pentru orice $i \neq j$, graful este complet. Echivalent, pentru un graf complet în matricea conexiunilor are loc $a_{ij}+a_{ji} \geqslant 1$, $\forall i, j, (i \neq j)$.

— Dacă $a_{ij}+a_{ji}=2$, în graf există circuitul de lungime doi $[x_i, x_j, x_i]$.

Trecînd de la graful orientat la graful neorientat corespunzător, arcele devin muchii și deci graful devine simetric. În consecință, matricea conexiunilor unui graf neorientat este simetrică.

Matricea conexiunilor unui graf parțial se obține egalînd cu 0, în matricea grafului dat, elementele corespunzătoare arcelor suprimate ; matricea își păstrează ordinul.

Pentru a obține matricea conexiunilor unui subgraf al unui graf, se elimină din matricea grafului dat liniile și coloanele corespunzătoare vîrfurilor suprimate. În acest fel, matricea unui subgraf este o submatrice a matricii grafului dat.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

2. DRUMURI DE VALOARE OPTIMĂ

Fiind dat un graf $G=(X, F)$, deseori arcele sale se pun în corespundență cu numere nenegative $v_{ij}=v(x_i, x_j)\geqslant 0$ pentru $x_j \in F(x_i)$, numite *valori* ale arcelor. Această „marcare" a arcelor cu valori este utilă în rezolvarea problemelor de următorul tip, des întîlnit în practică : se cere determinarea unui drum elementar de la un vîrf $x_1 \in X$ la alt vîrf $x_n \in X$ astfel ca valoarea sa, suma valorilor arcelor componente

$$v(D)=\sum_{(x_i, x_j) \in D} v_{ij}, \tag{2.1}$$

să fie optimă (maximă, respectiv minimă).

De exemplu, fie X o mulțime de localități, $\mathcal{A}$ o mulțime de căi rutiere care leagă diferitele localități (din X fac parte și intersecțiile diferitelor căi rutiere). Pentru o porțiune de cale rutieră între punctele x_i și x_j, v_{ij} poate însemna lungimea ei (în km), costul deplasării pe această porțiune sau timpul necesar pentru parcurgerea ei, ținînd cont de toate condițiile traficului. Se caută, pentru a ajunge dintr-o anume localitate în alta, drumul cel mai scurt, sau cel mai economicos (din punctul de vedere al costului), respectiv cel mai rapid.

Problema astfel formulată conduce la un model de programare liniară. Au fost însă dezvoltați algoritmi specifici, dintre care vom prezenta doi. Algoritmii sînt construiți pe principiul de optimalitate a lui Bellman : „Orice politică optimă este formată din subpolitici optime". Pentru teoria grafelor, acest principiu poate fi formulat astfel : Un drum de valoare optimă de lungime k (compus din k arce), constă din drumuri parțiale de valoare optimă de lungime h, $(h \leqslant k)$.

§ 2.1. ALGORITMUL FORD

Fie $G=(X, F)$ un graf în care arcele au valorile $v_{ij}=v(x_i, x_j)\geqslant 0$. Ne propunem determinarea drumului de valoare minimă de la un vîrf x_1 la un vîrf x_n.

Principiul algoritmului este următorul:

Fiecărui vîrf x_k al grafului i se asociază un marcaj, reprezentînd valoarea unui drum arbitrar de vîrful x_h la x_k, l_{hk}. Pentru un arc $(x_j, x_k)\in\mathcal{A}$ se pot prezenta trei situaţii (fig. 2.1):

a) $l_{hk}-l_{hj}<v_{jk}$

b) $l_{hk}-l_{hj}=v_{jk}$

c) $l_{hk}-l_{hj}>v_{jk}$.

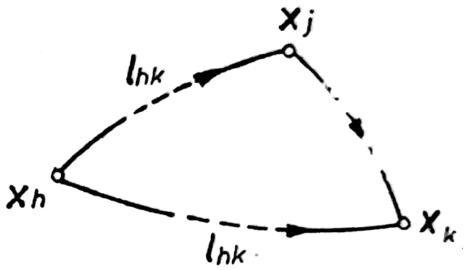


Fig. 2.1.

Din a) rezultă $l_{hk}<l_{hj}+v_{jk}$, adică: drumul „direct" de la x_h la x_k are o valoare mai mică decît drumul de la x_h prin x_j la x_k. Egalitatea b) arată că cele două drumuri au aceeaşi valoare: $l_{hk}=l_{hj}+v_{jk}$, iar c) conduce la constatarea că drumul de la x_h prin x_j la x_k are o valoare mai mică decît drumul direct x_h, x_k.

Căutînd drumul de valoare *minimă*, constatăm că în situaţia c) există un drum — $[x_h, x_j, x_k]$ — de valoare mai mică decît cea iniţială, iar în cazurile b) şi a) s-a obţinut valoarea minimă a drumurilor de la x_h la x_k. Marcajul vîrfului x_k poate fi deci modificat astfel

$$l'_{hk}=\begin{cases} l_{hj}+v_{jk}, & \text{dacă } l_{hk}-l_{hj}>v_{jk} \\ l_{hk}, & \text{dacă } l_{hk}-l_{hj}\leqslant v_{jk}. \end{cases} \tag{2.2}$$

După un număr finit de asemenea comparaţii, luînd în considerare celelalte vîrfuri ale grafului — în număr finit — se obţine valoarea minimă a drumurilor de la x_h la x_k.

Algoritmul Ford pentru determinarea drumului de valoare minimă între vîrfurile x_1 şi x_n ale unui graf finit $G=(X, F)$ este o operaţie secvenţială, desfăşurată în următoarele etape.

Etapa 1. Fiecărui vîrf al grafului i se asociază un marcaj l_k^0, $k=1\div n$, reprezentînd valoarea unui drum arbitrar de la x_1 la x_k. În particular $l_1^0=0$.

Etapa 2. Pasul 1. Se compară diferenţa dintre marcajul vîrfului final şi marcajul vîrfului iniţial pe fiecare arc $l_k^0-l_h^0$ cu valoarea arcului v_{hk} şi se modifică marcajul vîrfului final astfel

$$l_k^1=\begin{cases} l_h^0+v_{hk}, & \text{dacă } l_k^0-l_h^0>v_{hk} \\ l_k^0, & \text{dacă } l_k^0-l_h^0\leqslant v_{hk}. \end{cases}$$

Pasul 2. Cu noul şir de marcaje $l_1^1=0, l_2^1, \ldots, l_n^1$ se procedează în acelaşi mod :

$$l_k^2=\begin{cases} l_h^1+v_{hk}, & \text{dacă } l_k^1-l_h^1>v_{hk} \\ l_k^1, & \text{dacă } l_k^1-l_h^1\leqslant v_{hk}. \end{cases}$$

Pasul 3. Procedeul continuă pînă cînd, după s ajustări ale marcajelor vîrfurilor se obţin numai inegalităţi de forma

$$l_k^s-l_h^s\leqslant v_{hk}, \qquad \forall\,(x_h, x_k)\in \mathcal{A}.$$

În acest moment l_k^s este valoarea minimă a drumurilor de la x_1 la x_k. În particular, l_n^s este valoarea minimă căutată a drumurilor de la x_1 la x_n

Etapa 3. Pentru identificarea vîrfurilor prin care trece drumul de valoare minimă, din iteraţia s se aleg relaţiile satisfăcute prin egalităţi, parcurgînd graful de la x_n spre x_1. Fie

$$l_n^s-l_{j_p}^s=v_{j_p n}$$

$$l_{j_p}^s-l_{j_{p-1}}^s=v_{j_{p-1}j_p}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$l_{j_1}^s-l_1^s=v_{1j_1}.$$

Adunînd aceste egalităţi membru cu membru se obţine

$$l_n^s=v_{1j_1}+v_{j_1j_2}+\ldots+v_{j_{p-1}j_p}+v_{j_p n}$$

şi cum l_n^s este valoarea minimă a drumurilor dintre x_1 şi x_n, acest drum este

$$D=[x_1, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{p-1}}, x_{j_p}, x_n].$$

Observaţii. 1⁰. Algoritmul Ford poate fi aplicat şi în scopul determinării drumului de *valoare maximă* între două vîrfuri ale unui graf fără circuite. Se modifică doar criteriul de îmbunătăţire a marcajelor vîrfurilor din etapa 2.

Etapa 2.

$$l_k^1=\begin{cases} l_h^0+v_{hk}, & \text{dacă } l_k^0-l_h^0<v_{hk} \\ l_k^0, & \text{dacă } l_k^0-l_h^0\geqslant v_{hk}. \end{cases}$$

Procedeul se opreşte în pasul s, cînd sînt satisfăcute inegalităţile

$$l_k^s-l_h^s\geqslant v_{hk}, \quad \forall\,(x_h, x_k)\in \mathcal{A}.$$

2⁰. Pentru obţinerea marcajelor iniţiale l_k^0 se poate proceda astfel :

Scanned with OKEN Scanner

Etapa 0. Pasul 1. Se pune

$$l_k = \begin{cases} 0 , & k=1 \\ \pm\infty , & k>1 \end{cases} \begin{cases} +\infty \text{ în problema de minim} \\ -\infty \text{ în problema de maxim.} \end{cases}$$

Pasul 2. Pentru arcele incidente exterior lui x_1 se consideră $l_i^0 = v_{1i}$, $x_i \in F(x_1)$.

Pasul 3. Utilizînd marcajele l_i^0, $(x_i \in F(x_1))$ se calculează $l_j - l_i^0$ pentru arcele $(x_j, x_i) \in \mathcal{A}^+(F(x_1))$ și se corectează marcajele l_j în conformitate cu criteriul de optimalitate al problemei. Procedeul continuă pînă ce se obține un șir $l_1^0, \ldots, l_n^0$ de marcaje finite.

3°. În aplicații practice, calculele algoritmului se pot prezenta sub forma unui tablou care conține lista arcelor din graf, valoarea arcelor, diferențele marcajelor în diferitele iterații.

Exemplul 2.1. Să se determine drumul de valoare minimă între vîrfurile x_1 și x_8 din graful din fig. 2.2.

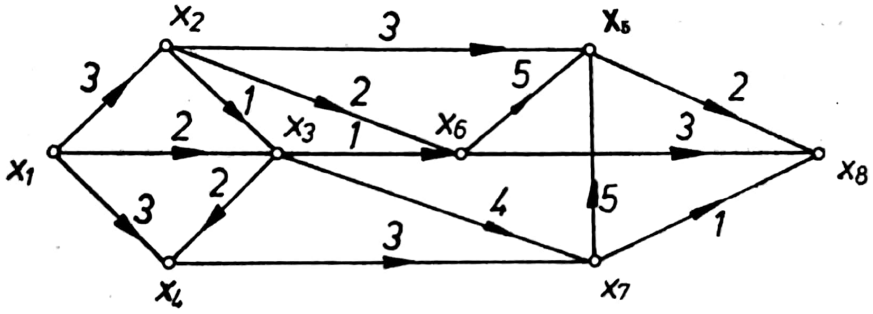


Fig. 2.2.

Etapa 1. Alegem $l_1^5=0$, $l_2^0=3$, $l_3^0=2$, $l_4^0=3$, $l_5^0=6$, $l_6^0=5$, $l_7^0=6$, $l_8^0=8$.

Etapa 2. Construim tabloul de calcul

$(x_h x_k)$	v_{hk}	$l_k^0 - l_h^0$	$l_k^1 - l_h^1$	$l_k^2 - l_h^2$	
x_1x_2	3	3	3	3	0^{x_1}
x_1x_3	②	2	2	②	
x_1x_4	3	3	3	3	
x_2x_3	1	−1	−1	−1	0^{x_3}
x_2x_5	3	3	3	3	
x_2x_6	2	2	0	0	
x_3x_4	2	1	1	1	
x_3x_6	①	3*	1	①	0^{x_6}
x_3x_7	4	4	4	4	
x_4x_7	3	3	3	3	
x_5x_8	2	2	1	0	
x_6x_5	5	1	3	3	
x_6x_8	③	3	4*	③	0^{x_8}
x_7x_5	5	0	0	0	
x_7x_8	1	2*	1	0	

În iterația întîi (pasul 1) căutăm diferențele mai mari decît valoarea arcului corespunzător. Avem

$$l_6^0 - l_3^0 = 5 - 2 = 3 > 1 = v_{36};$$
$$l_8^0 - l_7^0 = 8 - 6 = 2 > 1 = v_{78}.$$

Pe aceste arce se modifică marcajele vîrfurilor finale :

$l_6^1 = l_3^0 + v_{36} = 2 + 1 = 3$; $l_8^1 = l_7^0 + v_{78} = 6 + 1 = 7$. În acest fel, noul șir de marcaje este $l_1^1 = 0$, $l_2^1 = 3$, $l_3^1 = 2$, $l_4^1 = 3$, $l_5^1 = 6$. $l_6^1 = 3$, $l_7^1 = 6$, $l_8^1 = 7$. Cu ajutorul lor identificăm în coloana $l_k^1 - l_h^1$ diferențe mai mari decît valoarea v_{hk} a arcului corespunzător. Identificăm doar $l_8^1 - l_6^1 = 4 > v_{68} = 3$, deci $l_8^2 = l_6^1 + v_{68} = 3 + 3 = 6$. Așadar $l_1^2 = 0$, $l_2^2 = 3$, $l_3^2 = 2$, $l_4^2 = 3$, $l_5^2 = 6$, $l_6^2 = 3$, $l_7^2 = 6$, $l_8^2 = 6$. Calculînd $l_k^2 - l_4^2$ constatăm că numai există diferențe mai mari decît valoarea arcului corespunzător. Înseamnă că valoarea minimă a drumurilor de la x_1 la x_8 este $l_8^2 = 6$.

Etapa 3. În scopul determinării vîrfurilor drumului de valoare minimă parcurgem graful de la x_8 spre x_1. Pentru a ajunge în x_8, drumul trebuie să folosească un arc cu vîrful final x_8. Din iterația a doua alegem diferența egală cu valoarea arcului : $l_8^2 - l_6^2 = v_{68} = 3$. Înseamnă că drumul folosește arcul (x_6, x_8). Căutăm acum un arc cu vîrful final x_6 pentru care diferența ultimelor marcaje coincide cu valoarea sa : $l_6^2 - l_3^2 = v_{36} = 1$. Așadar, drumul folosește arcul (x_3, x_6). Arcul cu vîrful final x_3 pe care valoarea este egală cu diferența marcajelor din ultima iterație, este (x_1, x_3) : $l_3^2 - l_1^2 = v_{13} = 2$. În consecință, drumul de valoare minimă între x_1 și x_8 este $[x_1, x_3, x_6, x_8]$.

§ 2.2. ALGORITMUL BELLMAN-KALABA

Bazat pe calcule în matrici, algoritmul Bellman—Kalaba ordonează mai pregnant calculele pentru determinarea drumului de valoarea minimă între două vîrfuri ale unui graf decît algoritmul Ford.

Fie $G=(X, F)$ un graf în care arcele au valorile $v_{ij} = v(x_i, x_j) \geqslant 0$. Ne propunem determinarea drumului de *valoare minimă* de la vîrful x_1 la vîrful x_n.

Notăm $m_{in}^{(k)}$ valoarea minimă a drumurilor de lungime cel mult k de la x_i la x_n. Principiul de optimalitate Bellman-Kalaba care stă la baza algoritmului se poate formula acum astfel :

$$m_{in}^{(k+1)} = \min_{j \neq i} \{v_{ij} + m_{jn}^{(k)}\}, \quad i = 1 \div n-1. \tag{2.3}$$

Are loc

Teorema 2. 1. *Dacă există k astfel încît $m_{in}^{(k)} = m_{in}^{(k+1)}$ pentru toți indicii $i = 1 \div n$, atunci $m_{in}^{(k)}$ este valoarea minimă a drumurilor de la x_i la x_n, indiferent de lungimea lor.*

Scanned with OKEN Scanner

În ipoteza din enunț vom arăta, prin inducție, că valoarea drumurilor de la x_i la x_n nu poate fi micșorată oricare va fi numărul de arce componente, adică $m_{in}^{(k+s)}=m_{in}^{(k)}$ pentru orice $s\in N$. Conform ipotezei $m_{in}^{(k+1)}=m_{in}^{(k)}$ și afirmația este adevărată pentru $s=1$. Presupunem că $m_{in}^{(k+s)}=m_{in}^{(k)}$. Calculăm $m_{in}^{(k+s+1)}$:

$$m_{in}^{(k+s+1)}=\min_{j\neq i}\{v_{ij}+m_{jn}^{(k+s)}\}=\min_{j\neq i}\{v_{ij}+m_{jn}^{(k)}\}=m_{in}^{(k+1)},$$

relație valabilă pentru orice $i=1\div n-1$. Ținînd cont de ipoteză ($m_{in}^{(k+1)}=m_{in}^{(k)}$), rezultă $m_{in}^{(k+s+1)}=m_{jn}^{(k+s)}=m_{in}^{(k)}$, ceea ce arată că proprietatea este adevărată pentru orice s dacă este adevărată pentru $s=1$.

Folosind aceste rezultate, algoritmul Bellman-Kalaba pentru determinarea drumului de valoare minimă între două vîrfuri x_1 și x_n ale unui graf finit $G=(X, F)$ este un proces secvențial ce se desfășoară în etapele următoare.

Etapa 1. Grafului i se asociază o matrice pătrată de ordinul n (egal cu numărul vîrfurilor), ale cărei elemente se definesc prin

$$k_{ij}=\begin{cases} v_{ij}, & \text{dacă } x_j\in F(x_i) \\ 0, & \text{dacă } i=j \\ \infty, & \text{dacă } x_j\notin F(x_i). \end{cases}$$

Etapa 2. Pasul 1.

Se consideră $m_i^0=k_{in}$, $i=1\div n$.

Pasul 2. Se calculează

$$\begin{cases} m_i^1=\min_{j\neq i}\{v_{ij}+m_j^0\}, & i=1\div n-1. \\ m_n^1=0. \end{cases}$$

Pasul 3. Se calculează

$$\begin{cases} m_i^2=\min_{j\neq i}\{v_{ij}+m_j^1\}, & i=1\div n-1. \\ m_n^2=0. \end{cases}$$

Pasul 4. Procesul de modificare a marcajelor vîrfurilor m_i^s, $i=1\div n$ continuă pînă ce în iterația r are loc

$$m_i^r=m_i^{r-1}, \quad i=1\div n.$$

Aceste marcaje reprezintă valoarea minimă a drumurilor de la x_i la x_n. În particular, m_1^r este valoarea minimă a drumurilor de la x_1 la x_n.

Etapa 3. Pentru identificarea arcelor componente ale drumului optim constatăm că de-a lungul acestui drum arcele satisfac relația

$$m_i^r=v_{ij}+m_j^r,$$

iar pe alte arce $m_i^r>v_{ij}+m_j^r$ (conform etapei 2.) Graful se parcurge de la x_1 spre x_n astfel:

Scanned with OKEN Scanner

Fie $x_{h_1} \in F(x_1)$ astfel ca $m^r_{h_1} + k_{1h_1} = m^r_1$, atunci arcul (x_1, x_{h_1}) face parte din drumul optim. Dacă $m^r_{h_2} + k_{1h_1} = m_{h_1h_2}$, pe drumul de valoare minimă urmează arcul (x_{h_1}, x_{h_2}). Acest proces continuă pînă ce $m^r_{ht} = k_{h_t n}$. Drumul căutat este

$$[x_1, x_{h_1}, x_{h_2}, \ldots, x_{h_t}, x_n].$$

Observații 1. Algoritmul Bellmann-Kalaba poate fi utilizat și pentru determinarea drumului de *valoare maximă* între două vîrfuri ale unui graf fără circuite. În acest scop se modifică matricea $K=(k_{ij})$ atașată grafului astfel

$$k_{ij} = \begin{cases} v_{ij}, & x_j \in F(x_i) \\ 0, & i=j \\ -\infty, & x_j \notin F(x_i). \end{cases}$$

Etapa 2. Modificarea marcajelor vîrfurilor într-o iterație oarecare s se face după legea

$$\begin{cases} m_i^s = \max\limits_{j \neq i} \{v_{ij} + m_j^{s-1}\}, & i = 1 \div n-1 \\ m_n^s = 0 \end{cases}$$

și se oprește în aceleași condiții : $m_i^r = m_i^{r-1}$, $i = 1 \div n$.

2^0. Dacă pentru un vîrf x_i marcajul din iterația s este nul, $m_i^s = 0$, înseamnă că în graf nu există drumuri de lungime $s+1$ se la x_i la x_n.

3^0. Calcule pot fi efectuate într-un tablou care conține matricea K, liniile cu marcajele m_i^s și matrici pentru calculul sumelor $v_{ij} + m_j^s$, matrici în care diagonala principală este eliminată (desigur calculul marcajelor poate fi făcut și direct fără ajutorul acestor matrici suplimentare).

Exemplul 2. Vom determina drumul de valoare maximă printre vîrfurile x_1 și x_8 din graful din fig. 2.2. Avem

$K =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	3	2	3	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
x_2	$-\infty$	0	1	$-\infty$	3	2	$-\infty$	$-\infty$
x_3	$-\infty$	$-\infty$	0	2	$-\infty$	1	4	$-\infty$
x_4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$	3	$-\infty$
x_5	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$	2
x_6	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	5	0	$-\infty$	3
x_7	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	5	$-\infty$	0	1
x_8	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
m_i^0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	2	3	1	0
m_i^1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	2	3	7	0
m_i^2	8	5	5	4	2	7	7	0
m_i^3	13	9	11	10	2	7	7	0
m_i^4	15	12	12	10	2	7	7	0
m_i^5	16	13	12	10	2	7	7	0
m_i^6	16	13	12	10	2	7	7	0

Scanned with OKEN Scanner

Conform regulii din Pasul 1, Etapa 2, marcajele inițiale m_i^0 se obțin prin transpunerea ultimei coloane a matricii K.

Exemplificăm calculul cîtorva marcaje din iterațiile următoare :

$$m_1^1=max\ \{k_{12}+m_2^0,\ k_{13}+m_3^0,\ \ldots,\ k_{18}+m_8^0\}=max\ \{-\infty,\ -\infty,\ \ldots,\ -\infty\}=-\infty$$

$$m_7^1=max\ \{k_{71}+m_1^0,\ k_{72}+m_2^0,\ \ldots,\ k_{78}+m_8^0\}=max\ \{-\infty,\ -\infty,\ -\infty,\ -\infty,\ 7,\ -\infty,\ -\infty,\ 1\}=7$$

$$m_2^2=max\ \{k_{21}+m_1^1,\ k_{23}+m_3^1,\ \ldots,\ k_{28}+m_8^1\}=max\ \{-\infty,\ -\infty,\ -\infty,\ 5,\ 5,\ -\infty,\ -\infty\}=5$$

$$m_3^4=max\ \{k_{31}+m_1^3,\ k_{32}+m_2^3,\ \ldots,\ k_{38}+m_8^3\}=max\ \{-\infty,\ -\infty,\ 12,\ -\infty,\ 8,\ 11,\ -\infty\}=12.$$

Aceste marcaje sînt înscrise în liniile m_i^s în coloanele vîrfurilor x_i.

Constatăm că $m_i^6=m_i^5$, $i=1\div 8$, și deci aceste marcaje reprezintă valorile maxime ale drumurilor de la x_i la x_8.

În particular, valoarea maximă a drumurilor de la x_1 la x_8 este $m_1^6=16$.

În scopul stabilirii arcelor acestui drum procedăm astfel :

Arc cu vîrful inițial x_1 este (x_1, x_2) cu $v_{12}=3$ și $m_2^6=13$. Cum $v_{12}+m_2^6=3+13=16=m_1^6$, acest arc face parte din drumul optim. Pentru celelalte arce incidente exterior lui x_1 avem $v_{13}+m_3^6=2+12<m_1^6$, $v_{14}=m_4^6=3+10<m_1^6$ și deci nu sînt situate pe drumul optim. Drumul a ajuns deci în x_2, pentru care avem : $v_{23}+m_3^6=1+12=m_2^6$, $v_2+m_5^6=3+2<m_2^6$, $v_{26}+m_6^6=2+7<m_2^6$ și ca atare (x_2, x_3) este arc al drumului căutat. Pentru arcele incidente exterior lui x_3 rezultă : $v_{34}+m_4^6=2+10=m_3^6$, $v_{36}+m_6^6=1+7<m_3^6$, $v_{37}+m_7^6=4+7<m_3^6$ și arcul următor pe drumul de valoare maximă este (x_3, x_4). În același mod se constată că $v_{47}+m_7^6=3+7=m_4^6$; $v_{75}+m_5^6=5+2=m_7^6$; $v_{58}+m_8^6=2+0=m_5^6$. Cu aceasta drumul de valoare maximă între x_1 și x_8 este $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_5, x_8]$.

3. DRUMURI HAMILTONIENE

Fiind dat graful $G=(X, F)$ cu n vîrfuri, un drum hamiltonian este un drum elementar de lungime $n-1$ (trece o dată prin fiecare vîrf al grafului).

Cercetarea drumurilor hamiltoniene prezintă interes în programarea producției, în special pentru stabilirea ordinii de lansare a producției, de asamblare a unor lucrări complexe. Asemenea activități cuprind operații care se succed într-o ordine determinată pe de o parte de tehnologia respectivă și pe de altă parte de încărcarea rațională în timp a posturilor de lucru. Cel de al doilea aspect conduce la o problemă organizatorică : în funcție de anumite criterii economice trebuie stabilită succesiunea optimă a tuturor operațiilor, adică trebuie determinat drumul hamiltonian de valoare optimă în graful care modelează fenomenul.

§ 3.1. ALGORITMUL FOULKES

Ideea centrală a algoritmului Foulkes constă în descompunerea grafului dat în subgrafe tare conexe în care drumurile hamiltoniene se identifică mai ușor.

Două vîrfuri $x_i, x_j \in X$ ale grafului $G=(X, F)$ se numesc *echivalente*, dacă există un drum de la x_i la x_j și unul de la x_j la x_i. Se constată imediat că această definiție satisface criteriile unei relații de echivalență (reflexivitatea, simetria și tarnzitivitatea). În baza acestei relații de echivalență, vîrfurile grafului se constituie în clase de echivalențe (disjuncte două cîte două, a căror reuniune este mulțimea vîrfurilor grafului X).

Scanned with OKEN Scanner

Considerăm matricea conexiunilor grafului $G=(X, F)$, $A=(a_{ij})$, $i, j=1\div n$ cu elementele definite prin

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \text{ dacă } x_j\in F(x_i)\\ 0, \text{ dacă } x_j\notin F(x_i).\end{cases} \tag{3.1}$$

Existența elementului $a_{ij}=1$ indică prezența în graf a unui drum elementar de lungime 1 de la x_i la x_j.

Calculăm acum matricea $A^{(2)}$ după regula „linii cu coloane" astfel:

$$a_{ij}^{(2)}=\begin{cases}1, \text{ dacă } \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot a_{kj}\geqslant 1\\ 0, \text{ dacă } \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot a_{kj}=0\end{cases} \quad i, j=1\div n. \tag{3.2}$$

În conformitate cu această definiție, $a_{ij}^{(2)}=1$ dacă și numai dacă există cel puțin un k_0 astfel ca $a_{ik_0}a_{k_0j}=1$. Dar aceasta înseamnă că $a_{ik_0}=a_{k_0j}=1$. Așadar, $a_{ij}^{(2)}=1$ numai dacă există cel puțin un drum elementar de lungime 2 de la x_i la x_j (fig. 3.1).

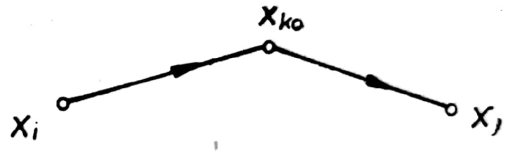


Fig. 3.1.

Generalizînd acest rezultat pentru matricea $A^{(p)}$ ale cărei elemente sînt definite prin

$$a_{ij}^{(p)}=\begin{cases}1, \text{ dacă } \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(p-1)}\cdot a_{kj}\geqslant 1\\ 0, \text{ dacă } \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(p-1)}\cdot a_{kj}=0\end{cases} \quad i, j=1\div n, \tag{3.3}$$

elementul $a_{ij}^{(p)}=1$ indică existența unui drum elementar de lungime p de la x_i la x_j.

Convenim pentru cele ce urmează $A\oplus A=A$ și definim matricea

$$B=U\oplus A,$$

unde $U=(\delta_{ij})$, $i, j=1\div n$ este matricea unitate de ordinul n (B se deosebește deci de A prin elementele egale cu 1 pe diagonala principală).

Construim matricea

$$B^{(2)}=U^{(2)}\oplus U\times A+A\times U\oplus A^{(2)}=U\oplus A\oplus A^{(2)},$$

ale cărei elemente

$$b_{ij}^{(2)}=\delta_{ij}\oplus a_{ij}\oplus a_{ij}^{(2)} \tag{3.4}$$

se definesc prin

$$b_{ij}^{(2)}=\begin{cases}1, \text{ dacă } \delta_{ij}+a_{ij}+a_{ij}^{(2)}\geqslant 1\\ 0, \text{ dacă } {}_{ij}+a_{ij}+a_{ij}^{(2)}=0.\end{cases} \quad i, j=1\div n$$

Pentru $i \neq j$, $\delta_{ij}=0$ și deci pentru ca $b_{ij}^{(2)}=1$ se prezintă trei posibilități:

$$b_{ij}^{(2)}=1, \text{ dacă } \begin{cases} a_{ij}=1 & \text{și} \quad a_{ij}^{(2)}=0 \\ a_{ij}=0 & \text{și} \quad a_{ij}^{(2)}=1 \\ a_{ij}=1 & \text{și} \quad a_{ij}^{(2)}=1. \end{cases}$$

Aceasta înseamnă că elementul $b_{ij}^{(2)}=1$ indică prezența unui drum elementar de lungime cel mult 2 de la x_i la x_j.

În general, dacă în matricea

$$B^{(p)}=U \oplus A \oplus A^{(2)} \oplus \ldots \oplus A^{(p-1)} \oplus A^{(p)}$$

există elementul $b_{ij}^{(p)}=1$, înseamnă că în graf există un drum elementar de lungime cel mult p de la x_i la x_j.

Pe baza acestor rezultate, algoritmul Foulkes pentru determinarea drumurilor hamiltoniene într-un graf se desfășoară astfel:

Etapa 1. Grafului i se asociază matricea $B=(b_{ij})$, $i, j=1 \div n$ cu elementele

$$b_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad a_{ij}=1 \quad (x_j \in F(x_i)) \\ 0, & \text{dacă} \quad a_{ij}=0 \quad (x_j \notin F(x_i)) \\ 1, & \text{dacă} \quad i=j. \end{cases}$$

Etapa 2. Pasul 1. Se calculează matricele

$$B^{(2)}, \; B^{(4)}, \; B^{(8)}, \ldots, B^{(2^k)} \text{ până ce } B^{(2^{k+1})}=B^{(2^k)}.$$

Pasul 2. În matricea $B^{(2^k)}$ se elimină liniile formate în exclusivitate din elemente egale cu 1 și coloanele corespunzătoare (ale căror elemente sînt 0 cu excepția celor din liniile suprimate):

$$b_{i_h j}^{(2^k)}=1, \; h=1 \div r, \; \forall j=1 \div n,$$

$$b_{i j_h}^{(2^k)}=0, \; h \neq 1 \div r, \; i \neq i_1, \ldots, i_r, \; b_{i_h j_h}=1, \; h=1 \div r.$$

Vîrfurile corespunzătoare liniilor și coloanelor eliminate $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}\}$ constituie prima componentă tare conexă a grafului. Într-adevăr, $b_{rs}^{(2^k)}=1$ indică prezența în graf a unui drum de lungime cel mult 2^k de la x_r la x_s, dar vîrfurile acestea nu se selectează decît dacă și $b_{sr}^{(2^k)}=1$, deci dacă sînt echivalente.

Etapa 3. Matricii rămase-după constituirea primei clase de echivalențe de vîrfuri $-B_1$ i se aplică **Etapa 2** și așa mai departe, pînă ce fiecare vîrf al grafului a fost repartizat unei clase de echivalențe.

Scanned with OKEN Scanner

Etapa 4. Pentru identificarea drumurilor hamiltoniene se procedează astfel:

1^0. Se figurează subgrafele tare conexe determinate,

2^0. Se trasează arcele ce leagă aceste grafe,

3^0. Se citesc drumurile hamiltoniene din graf parcurgînd vîrfurile primei clase de echivalenţă, trecînd la cea de-a doua pe arcele existente ş.a.m.d. pînă la epuizarea vîrfurilor ultimei clase de echivalenţă.

Observaţii. 1^0. În etapele 2 şi 3 se calculează matricile $A^{(2^k)}$, $k<n$, în scopul reducerii volumului de calcule

2^0. Pentru calcularea puterilor matricii A, datele pot fi prezentate sub forma schemei de mai jos, în care, respectînd regula de înmulţire a matricilor elementele matricii produs apare pe linia şi coloana care le generează.

	A
A	$A^{(2)}$
$A^{(2)}$	$A^{(4)}$
.	
.	
.	

Elementul din matricea produs este 1, dacă un produs de elemente corespunzătoare din linia şi coloana generatoare este 1.

Exemplul 3.1. Să aplicăm algoritmul Foulkes pentru determinarea drumurilor hamiltoniene din graful din fig. 3.2.

Etapa 1. Construim matricea B:

$B=$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1	1	1	1	1	0	0
X_2	0	1	0	1	1	0
X_3	0	1	1	0	1	0
X_4	0	0	1	1	0	1
X_5	0	0	0	0	1	1
X_6	0	0	0	0	0	1

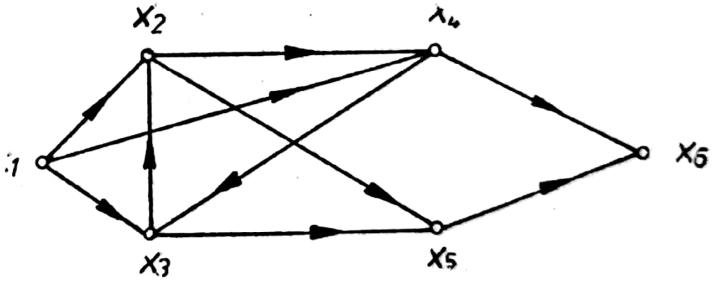


Fig. 3.2.

Etapa 2

1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1

A

1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1

1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1

$A^{(3)}$

1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1

$A^{(4)}$

Constatăm : $A^{(4)}=A^{(2)}$ și din $A^{(4)}$ eliminăm linia 1 — formată exlusiv din elemente 1 — și coloana 1. Vîrful x_1 constituie prima clasă de echivalență, $\varphi_1=\{x_1\}$.

Etapa 3. Dacă pentru matricea rămasă, de ordinul 5,

$$A_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

aplicăm același procedeu, constatăm că $A_1^{(2)}=A_1$ și prin eliminarea liniilor și coloanelor indicate obținem ce-a de-a doua clasă de vîrfuri, $\varphi_2=\{x_2, x_3, x_4\}$. Obținem matricea

$$A_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=A_2^{(2)} \text{ și deci } \varphi_3=\{x_5\} \text{ și } \varphi_4=\{x_6\}.$$

Etapa 4. Evidențiind cele 4 componente tare conexe ale grafului, acesta se poate prezenta ca în fig. 3.3

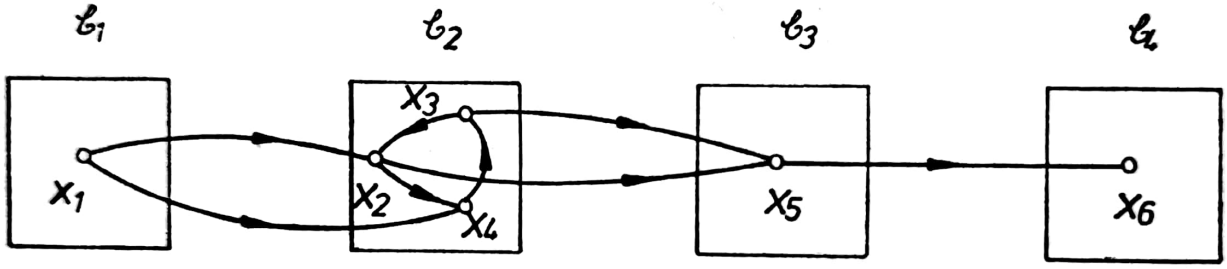


Fig. 3.3.

Parcurgînd componentele tare conexe ale grafului în ordinea identificării lor, se găsesc 2 drumuri hamiltoniene

$$H_1=[x_1, x_2, x_4, x_3, x_5, x_6],$$
$$H_2=[x_1, x_4, x_3, x_2, x_5, x_6].$$

§ 3.2. PRODUSUL MATRICILOR LATINE

Matricea latină $T=(t_{ij})$, $i, j=1\div n$ atașată grafului $G=(X, F)$ cu n vîrfuri a fost definită prin

$$t_{ij}=\begin{cases} i, j, & \text{dacă } x_j\in F(x_i) \\ 0, & \text{dacă } x_j\notin F(x_i), \end{cases} \tag{3.5}$$

în care elementele nenule indică drumurile elementare de lungime 1 din graf.

Avînd în vedere această definiție și faptul că drumul hamiltonian este un drum elementar de lungime $n-1$, s-a construit un algoritm pentru determinarea acestora folosind operații cu matricea latină a grafului.

Construim matricea $\bar{T}=(\bar{t}_{ij})$, $i, j=1\div n$ ale cărei elemente se obțin din cele corespunzătoare ale matricii latine suprimînd în fiecare element nenul indicele vîrfului inițial al arcului respectiv :

$$t_{ij}=\begin{cases} j, & \text{dacă } x_j\in F(x_i) \\ 0, & \text{dacă } x_j\notin F(x_i). \end{cases} \quad i, j=1\div n. \tag{3.6}$$

Cu ajutorul acestei matrici definim matricea „produs latin" $T^{(2)}=T\llcorner\bar{T}$ ale cărei elemente $t_{ij}^{(2)}$ se definesc astfel :

$t_{ij}^{(2)}=0$, dacă $t_{ik}=0$ sau $\bar{t}_{kj}=0$ pentru orice $k=1\div n$;

$t_{ij}^{(2)}=0$, dacă secvența indicilor vîrfurilor din t_{ik} și $\bar{t}_{kj}$ conține doi indici identici pentru orice $k=1\div n$;

$t_{ij}^{(2)}\neq 0$ este mulțimea tuturor tripletelor de indici distincți ce se pot forma alăturînd elementele t_{ik} și $\bar{t}_{kj}$, pentru toți $k=1\div n$.

În acest fel, elementele nenule din $T^{(2)}$ indică drumurile elementare de lungime 2 din graf.

Analog, dacă în matricea $T^{(3)}=T^{(2)}\llcorner\bar{T}$ avem $t_{ij}^{(3)}\neq 0$, înseamnă că în graf există un drum elementar de lungime 3 de la x_i la x_j.

Pentru a identifica drumurile hamiltoniene este deci suficient calculul matricii $T^{(n-1)}=T^{(n-2)}\llcorner\bar{T}$.

Observație. În aplicații practice este util să observăm că $T^{(4)}=T^{(3)}\llcorner\bar{T}=T^{(2)}\llcorner\bar{T}^{(2)}$ unde $\bar{T}^{(2)}$ se obține din $T^{(2)}$ suprimînd primul indice din elementele nenule.

Exemplul 3.2. Vom aplica procedeul grafului din fig. 3.2. Graful avînd 6 vîrfuri, trebuie calculată matricea $T^{(5)}$.

Vom calcula succesiv $T^{(2)}=T\llcorner\bar{T}$, $T^{(4)}=T^{(2)}\llcorner\bar{T}^{(2)}$, $T^{(5)}=T^{(4)}\llcorner\bar{T}$.

Avem

$T=$

0	12	13	14	0	0
0	0	0	24	25	0
0	32	0	0	35	0
0	0	43	0	0	46
0	0	0	0	0	56
0	0	0	0	0	0

$\bar{T}=$

0	2	3	4	0	0
0	0	0	4	5	0
0	2	0	0	5	0
0	0	3	0	0	6
0	0	0	0	0	6
0	0	0	0	0	0

Scanned with OKEN Scanner

Obținem

$T^{(2)}=$

0	132	143	124	125 135	146 246
0	0	243	0	0	256
0	0	0	324	325	356
0	432	0	0	435	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

$\overline{T}^{(2)}=$

0	32	43	24	25 35	46 46
0	0	43	0	0	56
0	0	0	24	25	56
0	32	0	0	35	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Cu acestea

$T^{(4)}=$

0	0	0	0	14325 12435	13246 14356 13256 12456
0	0	0	0	0	23456
0	0	0	0	0	32456
0	0	0	0	0	43256
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

și în definitiv

$T^{(5)}=$

0	0	0	0	0	143256 124356
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

de unde se regăsesc cele două drumuri hamiltoniene din graf :

$$H_1=[x_1,\ x_4,\ x_3,\ x_2,\ x_5,\ x_6] \text{ și}$$

$$H_2=[x_1,\ x_2,\ x_4,\ x_3,'x_5,\ x_6].$$

Observații. 1°. Pentru determinarea drumurilor hamiltoniene de valoare optimă se calculează valoarea fiecărui drum hamiltonian găsit (printr-unul din cei doi algoritmi prezentați) prin însumarea valorilor arcelor componente și se selectează acelea care au valoarea optimă.

2°. Problema determinării circuitelor hamiltoniene revine la determinarea drumurilor hamiltoniene și închiderea lor, dacă este posibil, printr-un arc orientat de la vîrful final la cel inițial.

Scanned with OKEN Scanner

4. ARBORE DE VALOARE MINIMĂ

§ 4.1. ARBORI

Reamintim : o pereche de vîrfuri, x_i, $x_j \in X$ formează *muchie*, dacă între ele există cel puţin un arc. Fie $\mathfrak{M}$ mulţimea muchiilor grafului G :

$$\mathfrak{M} = \{(x_i, x_j) \mid x_j \in F(x_i) \text{ sau (şi) } x_i \in F(x_j),\ i, j = 1 \div n\}. \tag{4.1}$$

O succesiune de muchii adiacente formează un *lanţ*. Lanţul închis este un *ciclu*. Graful este conex dacă între oricare două vîrfuri există cel puţin un lanţ.

Se numeşte *arbore* un graf (finit) conex fără cicluri. De exemplu, drumul de valoare minimă între două vîrfuri ale unui graf este un subgraf al grafului, fără cicluri şi conex, constituie deci un arbore. De asemenea drumul hamiltonian este un arbore, constituit dintr-un graf parţial al grafului dat (conex şi fără cicluri).

Propoziţia 4.1. *Un arbore cu n vîrfuri are* $n-1$ *muchii.* Demonstraţia se face prin inducţie asupra numărului n de vîrfuri. Afirmaţia este evidentă pentru $n=2$.

Presupunem că arborii cu $n-1$ vîrfuri au $n-2$ muchii. Pentru a arăta că în arbori cu n vîrfuri sînt $n-1$ muchii, constatăm că un asemenea graf trebuie să conţină un vîrf la care este incidentă o singură muchie. (Numărul de muchii incidente la un vîrf x_k este *gradul* acelui vîrf $g(x_k)$). Într-adevăr, dacă în arborele $G=(X, F)$ pentru toate vîrfurile am avea $g(x_k)=0$, $k=1 \div n$ el n-ar avea muchii, şi deci n-ar putea fi conex. Pe de altă parte, dacă $g(x_k) \geqslant 2$, $k=1 \div n$, în graf s-ar forma cel puţin un ciclu şi deci graful n-ar putea fi arbore. Aşadar, există $x_k \in X$ cu $g(x_k)=1$.

Eliminăm din arborele G vîrful x_k şi muchia incidentă lui, obţinem un arbore cu $n-1$ vîrfuri în care există — conform ipotezei — $n-2$ muncii. Adăugînd acum la aceasta vîrful x_k şi muchia incidentă lui, obţinem un arbore de n vîrfuri

și $n-1$ muncii și proprietatea este adevărată pentru orice număr (finit) n de vîrfuri.

Notînd $\mathfrak{M}$ mulțimea muchiilor din arborele $G=(X, F)$, acesta poate fi notat $G=(X, \mathfrak{M})$.

Propoziția 4.2. *Într-un arbore* $G=(X, \mathfrak{M})$, *între oricare două vîrfuri* $x_i, x_j \in X$ *există un lanț și unul singur.*

Într-adevăr, G fiind arbore, el este conex și între oricare două vîrfuri $x_i, x_j \in X$ există un lanț. Dacă între vîrfurile x_i și x_j ar exista mai multe lanțuri, s-ar forma un ciclu și G n-ar putea fi arbore.

Un arbore care conține toate vîrfurile grafului $G=(X, \mathfrak{M})$, se numește *arbore de acoperire* al grafului. În legătură cu această noțiune are loc

Teorema 4.3. *Condiția necesară și suficientă ca un graf* $G=(X, \mathfrak{M})$ *să fie conex este ca el să admită un arbore de acoperire.*

Fie $G=(X, \mathfrak{M})$ un graf conex. Se pot prezenta două situații : a) G nu are cicluri. Înseamnă că este arbore și pentru că conține toate vîrfurile din G, acesta este arbore de acoprire.

b) G conține cicluri. Într-unul din cicluri se înlătură o muchie, astfel încît ciclul să dispară, dar graful să rămînă conex. Se procedează la fel și în celelalte cicluri, pînă ce — după un număr finit de asemenea operații — se obține un graf parțial a grafului dat, conex, fără cicluri, adică un arbore de acoperire. Am demonstrat astfel necesitatea condiției. Suficiența este imediată : dacă G conține un arbore de acoperire, el este evident conex.

§ 4.2. ALGORITMUL KRUSKAL

Fie un graf conex dat prin mulțimea muchiilor sale, $G=(X, \mathfrak{M})$, cu n vîrfuri. Fiecărei muchii din graf i se asociază un număr nenegativ, numit *valoarea muchiei*. Notăm

$$v_{ij}=v\,[x_i, x_j] \geqslant 0, \quad \text{dacă} \quad [x_i, x_j] \in \mathfrak{M}. \tag{4.2}$$

În acest graf se pune problema determinării arborelui de acoperire de valoare minimă (valoarea arborelui este suma valorilor muchiilor componente).

Problema arborelui de acoperire de valoare minimă este întîlnită în realizarea unei rețele de telecomunicație între mai mulți abonați de lungime totală minimă, în organizarea rețelei de distribuire a apei, a gazului, de termoficare.

Un procedeu foarte simplu pentru determinarea arborelui de acoperire de valoare minimă într-un graf conex este algoritmul Kruskal, care este un procedeu iterativ și poate fi enunțat astfel :

Scanned with OKEN Scanner

Se alege dintre muchiile care încă nu fac parte din arbore muchia de valoare minimă, care nu formează ciclu cu muchiile deja selecționate, pînă ce se obțin cele $n-1$ muchii ale arborelui de acoperire.

Pentru justificarea acestui algoritm considerăm un graf conex $G=(X, \mathfrak{M})$ în care numerotăm muchiile

$$\mathfrak{M}=\{u_1, u_2, \ldots, u_p\} \text{ și fie } v_k=v(u_k)\geqslant 0, \quad k=1\div p,$$

valoarea muchiei u_k. Putem presupune că muchiile au valori distincte. Dacă, de exemplu $v_{k_1}=v_{k_2}=v_{k_3}$, considerăm

$$v(u_{k_1})=v_{k_1}+\varepsilon, \quad v(u_{k_2})=v_{k_1}+2\varepsilon, \quad v(u_{k_3})=v_{k_1}+3\varepsilon,$$

unde $\varepsilon>0$ este suficient de mic pentru a nu produce inversări în ordinea valorilor muchiilor. De asemenea, dacă graful nu este complet, la muchiile existente se adaugă muchii între perechile de vîrfuri $[x_i, x_j] \notin \mathfrak{M}$ cu o valoare $v[x_i, x_j]>\sum_{k=1}^{p} v_k$, diferită pentru fiecare muchie nouă adăugată. Graful astfel obținut este evident conex și valorile muchiilor sînt distincte.

În acest graf, fie $\bar{u}_1$ muchia de valoare minimă, $v(\bar{u}_1)=min\ v(u)$ și $\bar{u}_2$ muchia de valoare imediat superioară $v(\bar{u}_2)=min\ \{v(u) \mid u\neq u_1\}$. În conformitate cu algoritmul propus alegem acum muchia $\bar{u}_3$ de valoare imediat mai mare, care nu formează ciclu cu $\bar{u}_1$ și $\bar{u}_2$ și așa mai departe:

$$v(\bar{u}_1)<v(\bar{u}_2)<\ldots<v(\bar{u}_r).$$

Deoarece numărul muchiilor este finit $\left(C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}\right)$, există $r<\frac{n(n-1}{2}$, astfel încît continuind selectarea muchiilor de valoare minimă rămasă aceasta să nu fie posibilă fără a forma un ciclu. Conform propoziției 4.1 si teoremei 4.3 însemană că $r=n-1$, adică am găsit un arbore de acoperire $H=\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1}\}$. Să arătăm că are valoarea minimă. Presupunem că ar exista un arbore de acoperire $H'=\{u_1', \ldots, u_{n-1}'\}$ de valoare minimă, care nu coincide cu H. Fie $\bar{u}_k$ prima muchie din H (în ordinea valorilor lor) care nu aparține lui H'. În graful parțial $H' \cup \{\bar{u}_k\}$ s-a format un ciclu (fig.4.1), muchiile din H sînt desenate cu linii continue, cele din H' cu linii întrerupte.

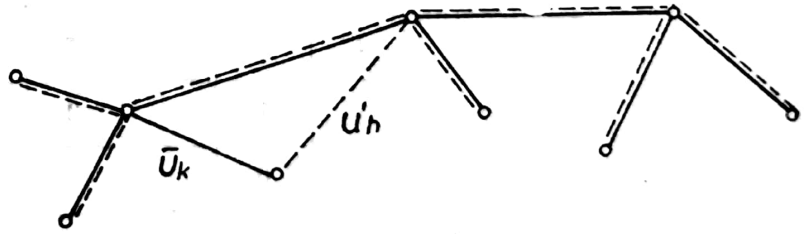


Fig. 4.1.

Pentru muchia $u_h \in H'$, $u_h' \notin H$ are loc $u_h' \neq \bar{u}_j$, $j=1\div k-1$, deoarece este prima muchie din H' care nu face parte din H. În conformitate cu criteriul de alegere a muchiilor din H, rezultă $v(u_h')>v(\bar{u}_k)$.

Suprimăm în H' muchia u_h' și o înlocuim cu $\bar{u}_k$, obținînd astfel un nou arbore de acoperire H'' (H'' este conex și are $n-1$ muchii). Valoarea lui H'' este mai mică decît valoarea lui H' (deoarece am înlocuit o muchie cu una de valoare mai mică) în contradicție cu ipoteza că H' ar avea valoare minimă. În consecință H este într-adevăr arborele de acoperire cu valoarea minimă și este unic.

Scanned with OKEN Scanner

Observaţii 1°. Algoritmul Kruskal se aplică, de regulă, construind matricea valorilor muchiilor din graf, ale cărei elemente z_{ij}, $i, j=1\div n$ se definesc prin

$$z_{ij}=\begin{cases} v_{ij}, & \text{dacă } [x_i, x_j]\in \mathfrak{M} \\ 0, & \text{pentru } i=j \\ \infty, & \text{dacă } [x_i, x_j]\in \mathfrak{M}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Matricea $Z=(z_{ij})$ fiind simetrică, este suficientă construcţia părţii ei deasupra diagonalei principale.

2°. Dacă muchiile nu au valori diferite, arborele de acoperire de valoare minimă nu trebuie să fie unic. Soluţia optimă nu este unică dacă procesul de selecţie a munchiilor din arbore se încheie pe o submulţime de muchii de aceeaşi valoare care nu sînt toate necesare pentru a completa numărul celor $n-1$ muchii din arborele de acoperire.

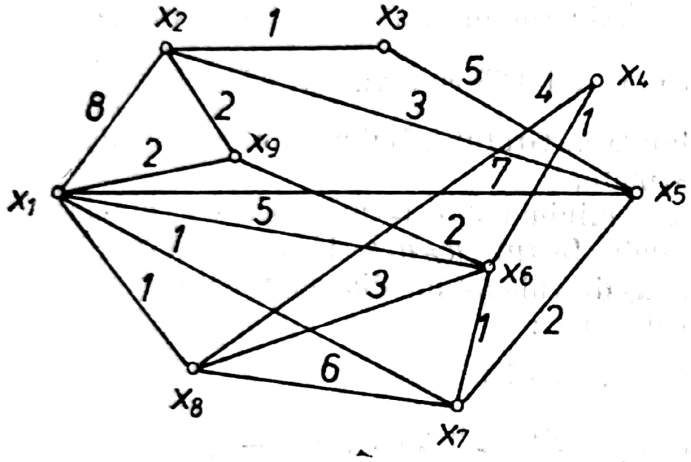


Fig. 4.2.

3°. Algoritmul Kruskal poate fi utilizat şi pentru determinarea arborelui de acoperire de valoare maximă într-un graf finit. În acest caz se defineşte $z_{ij}=-\infty$ dacă $[x_i,x_j]\notin \mathfrak{M}$ şi selecţia muchiilor se face în ordinea descrescătoare a valorilor lor.

Exemplul 4.1. Să se determine arborele de acoperire de valoare minimă în graful din figura 4.2.

Construim matricea valorilor muchiilor

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1	0	8			7	5	1^{I}	1^{II}	2
x_2		0	1^{III}		3				2
x_3			0		5				
x_4				0		1^{IV}			4
x_5					0		2		
x_6						0	1^{V}	3	2
x_7							0	6	
x_8								0	
x_9									0

Ordinea de alegere a muchiilor o notăm prin indici romani. Muchiile de valoare 1 au fost alese într-o ordine arbitrară, pentru a nu se forma cicluri cu ele :

I. $[x_1, x_7]$, II. $[x_1, x_8]$, III. $[x_2, x_3]$, IV. $[x_4, x_6]$, V. $[x_6, x_7]$.

Observînd mulțimea muchiilor de valoare 2, în număr de patru, constatăm : pentru a obține arborele de acoperire, trebuie selectate 3 dintre acestea și se oferă $C_4^3=4$ posibilități :

a) VI. $[x_1, x_9]$, VII. $[x_2, x_9]$, VIII. $[x_5, x_8]$

b) VI. $[x_1, x_9]$, VII. $[x_2, x_9]$, VIII. $[x_6, x_9]$

c) VI. $[x_1, x_9]$, VII. $[x_5, x_8]$, VIII. $[x_6, x_9]$

d) VI. $[x_2, x_9]$, VII. $[x_5, x_8]$, VIII. $[x_6, x_9]$

În varianta b) se formează ciclul $[x_1, x_9, x_6, x_7, x_1]$, iar în varianta c) apare același ciclu.

Problema admite deci două soluții :

$H_1=\{[x_1, x_7], [x_1, x_8], [x_2, x_3], [x_4, x_6], [x_6, x_7], [x_1, x_9], [x_2, x_9], [x_5, x_8]\}$.

$H_2=\{[x_1, x_7], [x_1, x_8], [x_2, x_3], [x_4, x_6], [x_6, x_7], [x_2, x_9], [x_5, x_8], [x_6, x_9]\}$.

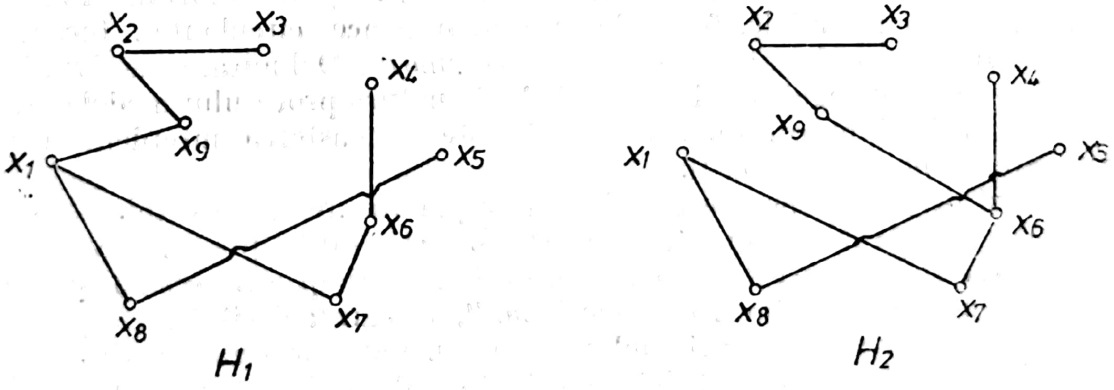


Fig. 4.3.

Valoarea minimă a arborelor de acoperire este 11 (fig. 4.3).

Scanned with OKEN Scanner

5. PLANIFICAREA ÎN GRAFURI

Înțelegînd prin *proces* ansamblul acțiunilor necesare pentru realizarea unui anumit obiectiv, se pune problema eșalonării acestor acțiuni în timp. În concordanță cu scopul modelării, procesul se descompune în procese parțiale numite *activități* sau *operații*. Ele se caracterizează prin faptul că pentru realizarea lor este necesar un timp și se consumă capacități al diverșilor factori de producție (materii prime și materiale, forță de muncă, mijloace circulante). Începutul și sfîrșitul fiecărei activități constituie un *eveniment*. Delimitarea activităților nu este supusă unor reguli rigide, ci depinde de natura procesului modelat și de amploarea analizei preconizate. Esențială este cunoașterea interdependenței și succesiunii proceselor parțiale.

Punctul de plecare pentru activitatea de planificare îl constituie o listă a activităților care conține durata acestora și activitățile precedente fiecărei activități. Cu ajutorul acestor date, desfășurarea în timp a procesului poate fi reprezentat grafic cu ajutorul *diagramei Gantt*, în care activitățile se prezintă prin segmente paralele cu axa timpului, de lungime proporțională cu durata lor.

Exemplul 5.1. Pentru procesul descris prin lista de activități din tabelul 5.1. diagrama Gantt este prezentată în fig. 5.1.

Tabelul 5.1

Lista de activități

Activitatea	Durata	Activități precedente
A	10	—
B	10	*A*
C	25	*A*
D	10	*B*
E	15	*B*
F	20	*D*, *E*

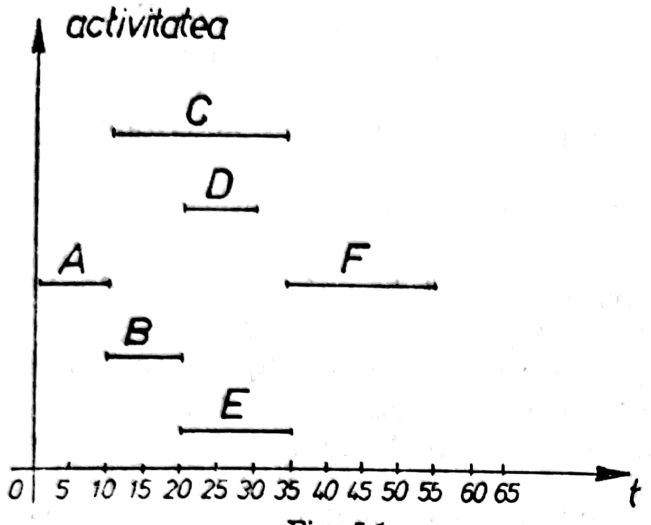


Fig. 5.1.

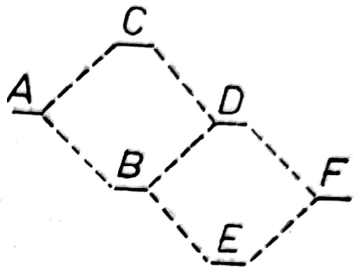
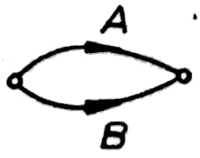


Fig. 5.2.

Dacă diagrama Gantt redă clar desfășurarea în timp a procesului, ea nu surprinde structurile sale interne, condiționările dintre activități. Renunțînd la respectarea succesiunii temporale și punînd în evidență structura internă a procesului din exemplul 5.1 se obține reprezentarea din fig. 5.2, care sugerează posibilitatea modelării procesului printr-un graf.

§ 5.1. GRAFUL DE EVENIMENTE ATAȘAT UNUI PROCES

Fiind dat un proces prin lista de activități, i se poate ataşa un graf orientat în care arcele reprezintă activitățile din proces, iar vîrfurile evenimentele (începutul, respectiv sfîrșitul activităților). Acest graf este evident finit, antisimetric și fără circuite, căci altfel o activitate ar putea să-și succeadă ei însăși. De regulă, graful de evenimente se consideră cu o singură sursă și o singură destinație. Activitățile fără precedent se consideră arce incidente evenimentului inițial al grafului, iar dacă graful — model are mai multe destinații, acesta se completează cu activități fictive de durată nulă — incidente spre interiorul unui eveniment de destinație unic. Pentru a garanta unicitatea denumirilor activităților din graf între două evenimente nu se consideră decît o singură activitate. Pentru eliminarea arcelor paralele din graf, se introduce un vîrf și un arc fictiv (fig. 5.3). Cu aceasta graful de evenimente pentru procesul din exemplul 5.1 este cel din fig. 5.4.



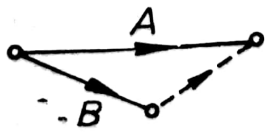


Fig. 5.3.

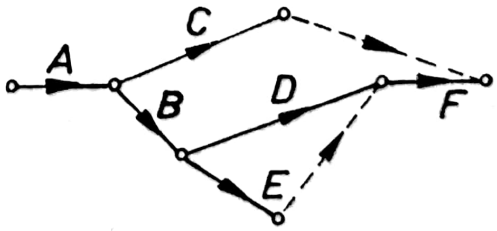


Fig. 5.4.

Considerăm graful de evenimente care modelează un proces și fie E_i, $i=1\div n$ vîrfurile sale, A_{ij}, $i\neq j$, $i, j=1\div n$ activitățile din proces, determinate de evenimentul inițial E_i și evenimentul final E_j: $A_{ij}=(E_i, E_j)$. Este convenabil ca numerotarea vîrfurilor să fie astfel făcută încît pentru fiecare activitate A_{ij} să avem $i<j$.

Pentru *ordonarea* grafului de evenimente prezentăm două procedee.

1°. **Procedeul eliminării succesive.** Evenimentul sursă primește indicele 1. În graf se suprimă toate arcele incidente exterior lui E_1. Evenimentele care rămîn acum fără arce incidente interior lor sînt evenimente de rang 1. Apoi se elimină arcele incidente exterior evenimentelor de rang 1, iar evenimentele care nu au arce incidente interior lor, au rangul 2 etc. Astfel, vîrfurile grafului se constituie în clase de *echivalență*, o clasă este formată din vîrfurile de același rang. Rangul unui vîrf reprezintă lungimea maximă a drumurilor de la sursă la acel vîrf.

Numerotarea vîrfurilor se face acum în ordinea claselor *de echivalență*, în interiorul unei clase, numerotarea poate fi făcută într-o ordine arbitrară. În acest fel, avînd în vedere că între vîrfurile aceleași clase nu există arce, pentru orice activitate $A_{ij}=(E_i, E_j)$ avem $i<j$.

2°. **Algoritmul Tremaux.** pentru ordonarea unui graf de evenimente se prezintă astfel.

Etapa 1. Fiecărui vîrf E_j i se atașează marcajul $\lambda_j=0$, iar fiecărui arc $A_{ij}=(E_i, E_j)$ valoarea $\delta_{ij}=1$.

Etapa 2. Este un proces iterativ de modificare a marcajelor vîrfurilor. În *iterația r* se parcurge mulțimea vîrfurilor într-o ordine arbitrară și se determină

$$\lambda_j^r=max\ \{\lambda_i^q+\delta_{ij}\},\ j=2\div n\ ;\ \lambda_1^r=0, \tag{5.1}$$

unde $q=r$ dacă vîrful E_i a fost deja examinat în iterația r, sau $q=r-1$ în caz contrar.

Acest proces iterativ continuă pînă ce în două iterații consecutive avem $\lambda_i^s=\lambda_i^{s-1}$, $i=1\div n$. În acest moment, λ_i^s reprezintă rangul vîrfului E_i.

Pentru justificarea acestei afirmații este suficient să ne edificăm asupra semnificației numărului λ_j^s.

Fie E_j un vîrf oarecare, pentru care în iterația s

$$\lambda_j^s=\max_i\ \{\lambda_i^q+\delta_{ij}\}=\lambda_{i_1}^q+\delta_{i_1j}=\lambda_{i_1}^q+1,$$

înseamnă că marcajul λ_j^s a fost obținut folosind arcul (E_{i_1}, E_j). Cum $q=s$ sau $q=s-1$, înseamnă că

$$\lambda_{i_1}^q=\lambda_{i_1}^s=\max_i\ \{\lambda_i^p+\delta_{ii_1}\}=\lambda_{i_2}^p+\delta_{i_2i_1}\ \text{ cu } p=s \text{ sau } p=s-1,$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\lambda_{i_1}^{q}=\lambda_{i_1}^{s-1}=\max_{i}\{\lambda_i^p+\delta_{ii_1}\}=\lambda_{i_2}^{p}+\delta_{i_2i_1} \quad \text{cu} \quad p=s-1 \quad \text{sau} \quad p=s-2.$$

Astfel

$$\lambda_j^s=\lambda_{i_2}^p+\delta_{i_2i_1}+\delta_{i_1j} \text{ cu } p=s \text{ sau } p=s-1 \text{ sau } p=s-2.$$

Acest proces poate continua pînă ce

$$\lambda_j^s=\lambda_{i_k}^v+\delta_{i_ki_{k-1}}+\delta_{i_{k-1}i_{k-2}}+\ldots+\delta_{i_2i_1}+\delta_{i_1j},$$

unde $\lambda_{i_k}^v=0$.

Dar $\lambda_{i_k}^v=0$ este posibilă numai în două situaţii :

a) $v=0$, dar atunci vîrful E_{i_k} n-a fost încă examinat, ceea ce în baza construcţiei este imposibil, sau

b) $i_k=1$ (conform construcţiei marcajelor) şi λ_j^s este numărul maxim de arce de la E_1 la E_j, deci rangul lui E_j.

Concluzionînd, algoritmul Tremaux realizează o partiţionare a mulţimii vîrfurilor în clase de vîrfuri de acelaşi rang şi ordonarea reţelei se face în acelaşi mod ca în procedeul elimării succesive.

§ 5.2. DATE TIMPURII. DRUMUL CRITIC

Fie $G=(X, F)$ graful de evenimente ce modelează desfăşurarea unui proces, cu $X=\{E_1, \ldots, E_n\}$ şi $E_j \in F(E_i)$ dacă şi numai dacă perechea de evenimente (E_i, E_j) defineşte o acivitate A_{ij} a procesului. Fiecărui arc al grafului $(E_i, E_j) \in \mathcal{A}$ îi ataşăm ca valoare durata activităţii corespunzătoare : $v(E_i, E_j)=d_{ij} \geqslant 0$ (pentru activităţi fictive, $d_{ij}=0$).

Măsurarea timpului începe cu evenimentul-sursă E_1 al grafului şi se consideră data de început al procesului momentul 0.

Data timpurie de realizare a unui eveniment E_j din graf este momentul încheierii tuturor activităţilor incidente interior la E_j. Astfel, data timpurie $\bar{t_j}$ a evenimentului E_j este valoarea maximă a drumurilor de la E_1 la E_j. Desigur, $\bar{t_j}$ este de asemenea momentul cel mai devreme pentru începerea tuturor activităţilor incidente exterior lui E_j.

Se numeşte *durata critică* a procesului modelat prin graful de evenimente, data timpurie $\bar{t_n}$ de realizare a evenimentului destinaţie E_n din graf. Durata critică este deci necesarul minim de timp pentru realizarea tuturor activităţilor din proces.

Drumul critic este drumul de valoare maximă de la sursa E_1 la destinaţia E_n din graf.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru calculul datelor timpurii ale evenimentelor din graf și deci și pentru identificarea drumului critic poate fi aplicat algoritmul Ford sau algoritmul Bellman-Kalaba.

Într-un graf de evenimente ordonat, algoritmul Bellman-Kalaba se aplică în următoarea variantă.

Etapa 1. Vîrfurile grafului se machează cu

$$l_j=0, \quad j=1\div n.$$

Etapa 2. Marcajele vîrfurilor se modifică după regula

$$l_j^1=\max_{i<j}\{l_i^1+d_{ij}\},\ j=2\div n\ ;\ l_1^1=0. \tag{5.2}$$

Se reține indicele i_0 pentru care $l_{i_0}^1+d_{i_0j}=l_j^1$.

Așadar, pentru obținerea duratei critice într-un graf de evenimente ordonat, este suficientă aplicarea unei iterații a algoritmului.

Într-adevăr, graful parcurgîndu-se în ordinea $E_1, E_2, \ldots, E_i, \ldots, E_j, \ldots \ldots, E_n$ marcajul l_j^1 se stabilește *deabia* după ce au fost determinate toate marcajele l_i^1, $i<j$, care ar putea contribui la formarea lui.

În iterația a doua, marcajele vîrfurilor ar fi

$$l_j^2=\max_{i<j}\{l_i^2+d_{ij}\},\ j=2\div n\ ;\ l_1^2=0$$

și $l_j^2>l_j^1$ numai dacă există $l_i^2>l_i^1$ pentru $i<j$. Dar d_{ij} sînt constante și $l_1^2=l_1^1=0$, deci $l_2^2=l_2^1$ etc.

Marcajele l_j^1 obținute reprezintă valoarea maximă a drumurilor de la E_1 la E_j și deci sînt datele timpurii ale evenimentelor din graf : $l_j^1=\bar{t_j}$, $j=1\div n$. În particular, $l_n^1=\bar{t_n}$ este durata critică T_0 a procesului.

Observații. 1°. Procedeul conduce pentru toate activitățile la $A_{ij}=(E_i, E_j)$ la inegalitatea

$$\bar{t_j}-\bar{t_i}\geqslant d_{ij}.$$

2°. Pentru identificarea drumului critic constatăm :

Dintre toate drumurile de la E_1 la E_n numai acelea sînt critice, adică au valoarea $T_0=\bar{t_n}$, care se compun exclusiv din arce (E_i, E_j) pentru care $\bar{t_j}-\bar{t_i}=d_{ij}$.

Într-adevăr, fie $E_1, E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_k}, E_n$ un drum care satisface condiția. Valoarea drumului este

$$d_{1i_1}+d_{i_1i_2}+\ldots+d_{i_kn}=$$
$$=(\bar{t_{i_1}}-\bar{t_1})+(\bar{t_{i_2}}-\bar{t_{i_1}})+\ldots+(\bar{t_n}-\bar{t_{i_k}})=\bar{t_n}-\bar{t_1}=T_0,$$

adică drumul este critic.

Reciproc, dacă în drumul considerat arcul $(E_{i_r}, E_{i_{r+1}})$ nu satisface condiția, $\bar{t}_{i_{r+1}} - \bar{t}_{i_r} > d_{i_r i_{r+1}}$, atunci valoarea sa ar fi

$$d_{1i_1} + d_{i_1 i_2} + \ldots + d_{i_r i_{r+1}} +$$

$$+ \ldots + d_{i_k n} < (\bar{t}_{i_1} - \bar{t}_1) + (\bar{t}_{i_2} - \bar{t}_{i_1}) + \ldots + \bar{t}_{i_{r+1}} - \bar{t}_{i_r}) +$$

$$+ \ldots + (\bar{t}_n - \bar{t}_{i_k}) = T_0,$$

mai mică decît valoarea critică, contrar ipotezei că ar fi drum critic.

3⁰. Condiția $\bar{t}_j - \bar{t}_i = d_{ij}$ este decît o condiție necesară (dar nu și suficientă) pentru ca arcul (E_i, E_j) să aparțină drumului critic.

Pentru a finaliza algoritmul Bellman-Kalaba, în

Etapa 3. se identifică drumul critic (sau drumurile critice), prin parcurgerea grafului de la destinația spre sursă.

Dintre toate arcele incidente interior destinației E_n se reține activitatea A_{kn} pentru care $T_0 - \bar{t}_k = d_{kn}$. Apoi se cercetează arcele incidente interior evenimentului E_k astfel determinat și se reține activitatea A_{hk} cu $\bar{t}_k - \bar{t}_h = d_{hk}$. Procedeul continuă pînă la atingerea evenimentului sursă E_1.

Parcurgînd graful de la destinație la sursă este garantată găsirea evenimentelor de pe drumul critic, în virtutea etapei 1 a algoritmului.

Dacă s-ar parcurge graful în ordinea dată începînd cu E_1, este posibil ca pe parcurs să existe un eveniment E_i pentru care nici un arc incident exterior să nu satisfacă condiția critică $\bar{t}_j - \bar{t}_i = d_{ij}$.

§ 5.3. DATE TÎRZII

Data timpurie $\bar{t}_j$ a unui eveniment E_j din graful care modelează desfășurarea unui proces indică momentul cel mai devreme la care se poate produce evenimentul. Este însă posibil ca E_j să se realizeze și mai tîrziu, fără a influența asupra duratei critice T_0 sau asupra unei durate T^* dinainte stabilită pentru încheierea întregului proces. Acest lucru este posibil atunci și numai atunci cînd valoarea maximă a drumurilor de la E_j la E_n nu depășesc $\bar{t}_n - \bar{t}_j$, respectiv $T^* - \bar{t}_j$.

Data tîrzie $\bar{t}_j^+$ a evenimentului E_j trebuie să fie deci de așa manieră încît încheierea activităților A_{ij} incidente interior la E_j la acest moment $(\bar{t}_j^+)$ să nu influențeze termenul final T^* fixat pentru încheierea întregului proces. Rezultă că $\bar{t}_j^+$ este diferența dintre T^* și valoarea maximă a drumurilor de la E_j la E_n.

În calculul datelor tîrzii ale evenimentelor poate fi aplicat de asemenea algoritmul Bellman-Kalaba în următoarea variantă.

Scanned with OKEN Scanner

Etapa 1. Evenimentele din rețea se marchează cu

$$m_j=0, j=1\div n.$$

Etapa 2. Parcurgînd graful de la destinație spre sursă, se calculează

$$m_j^1=\max_k \{m_k^1+d_{jk}\}, j=n-1, n-2, \ldots, 2, 1 ; m_n^1=0 \tag{5.3}$$

și se reține evenimentul E_{k_0} care realizează

$$m_j^1=m_{k_0}^1+d_{jk_0}.$$

Etapa 3. Datele tîrzii ale evenimentelor sînt

$$t_j^+=T^*-m_j^1, j=1\div n.$$

Cu ajutorul datelor timpurii și a datelor tîrzii pentru evenimente se stabilesc proprietăți importante.

Propoziția 5.1. *Condiția necesară și suficientă ca un eveniment E_j să fie critic (să aparțină drumului critic) este ca $t_j^+=t_j^-$.*

Într-adevăr, presupunînd că E_j este situat pe un drum critic, înseamnă că valoarea maximă a drumurilor de la E_1 prin E_j la E_n este T_0. Pe de altă parte, valoarea maximă a drumurilor de la E_1 la E_j este t_j^-, iar valoarea maximă a drumurilor de la E_j la E_n este m_j^1. Rezultă că $T_0=t_j^-+m_j^1$, adică $t_j^-=T_0-m_j^1$ și deci $t_j^-=t_j^+$.

Reciproc, dacă $t_j^+=t_j^-$, rezultă că $t_j^-=T_0-m_j^1$ sau $t_j^-+m_j^1=T_0$ ceea ce, ținînd cont de semnificația valorilor t_j^- și m_j^1, înseamnă că E_j este situat pe un drum critic (de evaloare T_0).

Propoziția 5.2. *Condiția necesară și suficientă ca o activitate $A_{ij}=(E_i, E_j)$ să fie situată pe un drum critic este ca*

$$t_j^+-t_i^-=d_{ij}.$$

Presupunînd că A_{ij} aparține unui drum critic, avem $t_i^-+d_{ij}+m_j^1=T_0$. Cum $T_0-m_j^1=t_j^+$, rezultă $t_j^-+d_{ij}=t_j^+$ și condiția este necesară.

Dacă are loc relația $t_j^+-t_i^-=d_{ij}$, atunci $T^0-m_j^1-t_i^-=d_{ij}$ sau $T_0=t_i^-=d_{ij}+m_j$ și avînd în vedere semnificația valorilor t_j^- și m_j^1 rezultă suficient condiției.

O activitate A_{ij} situată pe un drum critic, adică o activitate a cărei durată coincide cu lungimea intervalului maximal de timp în care se poate desfășura ($d_{ij}=t_j^+-t_i^-$), se numește *activitate critică*. Dimpotrivă, o activitate pentru care $t_j^+-t_i^->d_{ij}$, este necritică.

Scanned with OKEN Scanner

§ 5.4. REZERVE. ACTIVITĂȚI SUBCRITICE

Considerăm graful de evenimente al unui proces în care s-au determinat datele timpurii t_j^- și datele tîrzii t_j^+ ale evenimentelor E_j, $j=1\div n$ și s-a găsit drumul critic.

Pentru un eveniment E_j, diferența dintre data tîrzie și data timpurie, $t_j^+ - t_j^-$ se numește *fluctuație*, iar intervalul $[t_j^-, t_j^+]$ este intervalul de fluctuație a evenimentului.

Pentru o activitate $A_{ij}=(E_i, E_j)$, am văzut că pentru a nu perturba finalizarea întregului proces la momentul T^* (sau T_0), ea nu poate începe înaintea momentului t_i^- (data timpurie a evenimentului ei inițial) și nici nu poate fi prelungită dincolo de momentul t_j^+ (data tîrzie a evenimentului ei final).

Definim :

— *rezerva totală* a unei activități A_{ij} este

$$\tau_{ij}=t_j^+ - t_i^- - d_{ij}, \tag{5.4}$$

— *rezerva liberă* a activității A_{ij} este

$$\lambda_{ij}=t_j^- - t_i^- - d_{ij}, \tag{5.5}$$

— *rezerva independentă* (sau sigură) a activității A_{ij} este

$$\varepsilon_{ij}=max\ \{0,\ t_j^- - t_i^+ - d_{ij}\}. \tag{5.6}$$

Dacă pentru activitatea A_{ij} o rezervă este pozitivă, ea reprezintă un interval de timp care poate fi folosit în diverse scopuri :

1. se dilată durata activității în scopul realizării unei economii de forță de muncă, la această activitate, necesară la altă activitate ;

2. se amînă începerea activității cît permite rezerva pentru a garanta asigurarea tuturor condițiilor pentru buna ei realizare (materii prime, materiale) ;

3. se fracționează rezolvarea activității, intercalîndu-se pauze, în scopuri similare celor deja formulate.

Cu privire la rezervele unei activități observăm :

1. Dacă se folosește integral rezerva totală, durata activității devine : $d'_{ij}=d_{ij}+\tau_{ij}$ și în această consecință $t'^-_j=t_j^+$ și $t'^+_i=t_i^-$, adică fluctuațiile evenimentelor care definesc activitatea se cumulează, ceea ce influențează desigur și rezervele celorlalte activități din graf. Acest rezultat îndreptățește introducerea rezervei libere.

2. Rezerva liberă a unei activități este o parte a rezervei totale ($t_j^- \leqslant t_j^+$ și deci $\lambda_{ij} \leqslant \tau_{ij}$). Utilizarea rezervei libere pentru prelungirea duratei activității nu influențează fluctuația evenimentului ei final, deoarece

$$\tau_{ij}-\lambda_{ij}=(t_j^+ - t_i^- - d_{ij})-(t_j^- - t_i^- - d_{ij})=t_j^+ - t_j^-.$$

Scanned with OKEN Scanner

3. Dacă rezerva independentă a unei activități este pozitivă, ea poate fi folosită pentru prelungirea duratei de execuție a activității fără a modifica rezervele celorlalte activități. Într-adevăr, dacă $\varepsilon_{ij}>0$, atunci

$$\varepsilon_{ij}=t_j^- - t_i^+ - d_{ij}=t_j^- - t_i^- - (t_i^+ - t_i^-) - d_{ij}=\lambda_{ij}-(t_i^+ - t_i^-),$$

adică rezerva independentă se obține scăzînd din rezerva liberă fluctuația evenimentului inițial al acțiunii care rămîne astfel neatinsă. Cum rezerva liberă nu afectează fluctuația evenimentului final, afirmația este demonstrată.

Din cele prezentate rezultă.

$$\tau_{ij} \geqslant \lambda_{ij} \geqslant \varepsilon_{ij}.$$

Rezerva totală a unei activități A_{ij} poate fi privită ca diferența dintre durata critică T_0 a procesului și valoarea maximă a drumurilor în graf de la sursă la destinație care trec prin activitate. Astfel, rezerva totală este o măsură a „situației critice" a activității ; cu cît rezerva totală este mai mică, cu atît drumul de valoare maximă prin activitate are o valoare mai apropiată de durata critică.

Fiind dat numărul $\delta>0$, se numește *subcritic* un drum de la sursă la destinație a cărei valoare L satisface.

$$T_0-\delta<L<T_0.$$

Activitățile situate pe drumuri subcritice se numesc *activități subcritice.*

Identificarea drumurilor de valoare maximă prin activitatea A_{ij} poate fi realizată folosind rezultatele parțiale din algoritmii pentru determinarea datelor timpurii și datelor tîrzii a evenimentelor din graf.

Se determină drumul de valoare maximă de la E_1 la E_i, căutînd evenimentul E_i pentru care

$$t_i^- = t_{i_1}^- + d_{i_1 i} = l_{i_1}^1 + d_{i_1 i},$$

eveniment reținut în etapa 2 a algoritmului descris. Pentru E_i se procedează la fel, pînă ce se atinge sursa E_1.

Pentru identificarea drumului de valoare maximă între E_j și E_n este suficient să urmărim modul de obținere a datelor tîrzii m_j^1 în etapa 2 a algoritmului corespunzător.

Însumînd acum valorile arcelor drumului identificat, obținem valoarea maximă L a drumurilor prin activitatea A_{ij} și o putem compara cu T_0 și $T_0-\delta$.

Rezerva totală a unei activități τ_{ij}, nu este întotdeauna un indicator fidel pentru situația critică a activității și de aceea se introduce *factorul de urgență* a activității.

Notăm : $L\,(i, j)$ valoarea maximă a drumurilor de la sursă la destinație care trec prin activitatea A_{ij},

$L'\,(i, j)$ valoarea porțiunii de pe drumul de valoare minimă prin activitatea A_{ij}, cuprinsă între cele mai apropiate două evenimente de pe drumul critic,

$T_0\,(i, j)$ valoarea porțiunii drumului critic cuprinsă între evenimentele folosite anterior.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă în graf sînt mai multe drumuri critice, factorul de urgență a activității A_{ij} este

$$\omega_{ij}=max\left\{\frac{L'(i,j)}{T_0(i,j)}\right\}. \tag{5.7}$$

Dacă pentru drumul de valoare maximă $L(i,j)$ prin activitatea A_{ij} există două evenimente diferite de E_1 și E_n și de E_i și E_j, părțile din drumul de valoare $L(i,j)$ precedentă și respectiv succesivă acestor evenimente coincid cu părțile corespunzătoare ale drumului critic. Fie $T_0'(i,j)$ valoarea totală a acestor drumuri critice parțiale. Cu aceasta

$$\frac{L'(i,j)}{T_0(i,j)}=\frac{L'(i,j)+T_0'(i,j)-[T_0'(i,j)+T_0(i,j)]+T_0(i,j)}{T_0(i,j)}=$$

$$=\frac{L(i,j)-T_0+T_0(i,j)}{T_0(i,j)}=1-\frac{T_0-L(i,j)}{T_0(i,j)}.$$

Dar $T_0-L(i,j)=\tau_{ij}$ și

$$\omega_{ij}=max\left\{1-\frac{\tau_{ij}}{T_0'(i,j)}\right\}. \tag{5.8}$$

Această relație arată că pentru activitățile critice ($\tau_{ij}=0$), factorul de urgență are valoarea 1, iar pentru activități subcritice este aproape 1.

§ 5.5. PLANIFICAREA ÎN GRAFUL DE ACTIVITĂȚI ATAȘAT UNUI PROCES

Fiind dat un proces prin lista de activități, graful de evenimente nu este modalitatea unică prin care se poate modela desfășurarea sa. Considerînd activitățile procesului noduri și condiționările dintre activitățile arce, se obține *graful de activități* a procesului.

Exemplul 5.2. Graful de activități a procesului din exemplul 5.1 este prezentat în fig. 5.5.

De obicei, graful de activități al unui proces se construiește cu o singură sursă și o singură destinație. Dacă există mai multe activități fără precedenți, ele se consideră condiționate de o activitate unică fictivă de start, iar dacă are mai multe

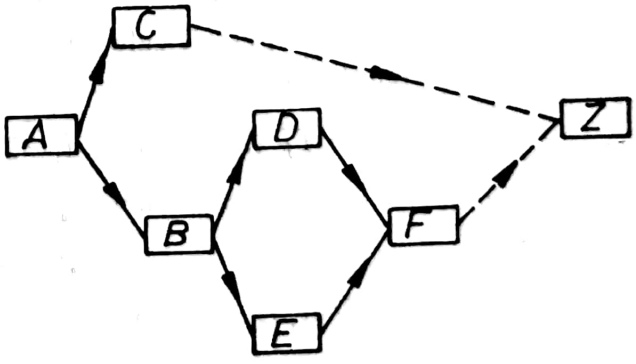


Fig. 5.5.

destinații, se consideră că ele condiționează o activitate unică fictivă de încheiere a procesului. Activitățile fictive au evident durate nulă.

Fie A_i, $i=1\div n$ activitățile unui proces. Dacă A_j este o activitate condiționată de A_i, (A_i, A_j) formează arc în graful de activități și notăm $A_j \in F(A_i)$. Notăm d_i durata activității A_i, $i=1\div n$ și presupunem graful ordonat.

În planificarea desfășurării procesului interesează :

1°. *Termenul cel mai devreme pentru începerea* activității A_i. Acesta este momentul la care s-au încheiat toate activitățile precedente

$$T_s^-(i)=max\ \{T_s^-(h)+d_h \mid A_i \in F(A_h)\},\ i=2\div n, \tag{5.9}$$

$$T_s^-(1)=0.$$

2°. Termenul *cel mai devreme pentru încheierea* unei activități

$$T_f^-(i)=T_s^-(i)+d_i,\ i=1\div n. \tag{5.10}$$

Cu aceasta

$$T_s^-(i)=max\ \{T_f^-(h) \mid A_i \in F(A_h)\}. \tag{5.11}$$

Durata critică a procesului este temernul cel mai devreme pentru încheierea ultimei activități din graf (activitatea-destinație)

$$T_0=T_f^-(n). \tag{5.12}$$

3°. Termenul *cel mai tîrziu pentru finalizarea* activității este momentu cel mai timpuriu la care pot începe activitățile următoare :

$$T_f^+(i)=min\ \{T_f^+(j)-d_j \mid A_j \in F(A_i)\},\ i=n-1, n-2, \ldots 2, 1, \tag{5.13}$$

$$T_f^+(n)=T^*\ \text{fixat}. \tag{5.14}$$

4°. Termenul *cel mai tîrziu pentru startul* unei activități

$$T_s^+(i)=T_f^+(i)-d_i,\ i=1\div n. \tag{5.15}$$

Astfel

$$T_f^+(i)=min\ \{T_s^+(j) \mid A_j \in F(A_i)\}. \tag{5.16}$$

Aceste termene permit calculul rezervelor activităților :

a) *rezerva totală* a activităților A_i este

$$\tau_i=T_f^+(i)+T_s^-(i)-d_i=T_s^+(i)-T_s^-(i)=T_f^+(i)-T_f^-(i), \tag{5.17}$$

b) rezerva *liberă* se definește prin :

$$\lambda_i=T_f^-(i)-T_s^-(i)-d_i, \tag{5.18}$$

c) *rezerva independentă* se calculează prin

$$\varepsilon_i=max\ \{T_f^-(i)-T_s^+(i)\ -d_i\ ;\ 0\}. \tag{5.19}$$

§ 5.6. UN EXEMPLU

Examinăm o parte a procesului de construcţii-montaj a unui bloc de locuinţe, parte destinată suprastructurii de rezistenţă şi de arhitectură. Acest proces (simplificat) se prezintă sub forma următoarei *liste de activităţi* (tabelul 5.1)

Tabelul 5.1

Lista activităţilor

Activitatea		Durata (zile)	Activităţi precedente
Simbol	Denumirea		
A	Montaj dispozitive de susţinere a panourilor	2	—
B	Turnarea panourilor prefabricate	12	—
C	Izolaţii	1	—
D	Montare trepte beton	3	*A*
E	Suduri	9	*B*
F	Turnare beton pentru scări interioare	1	*C*
G	Confecţii metalice	2	*D*
H	Montarea stîlpilor de susţinere din oţel beton	1	*E*
I	Montare cofraje metalice	10	*E*
K	Montare cofraje de lemn	2	*E*
L	Montaj portbandă trepte	1	*E*
M	Montaj schelă exterioară	5	*F*
N	Lucrări tîmplărie	1	*G*
P	Montare armături metalice	4	*I*, *K*
Q	Betoane şi montare pentru monolitizări	6	*H*, *P*, *L*
R	Etanşări, izolaţii la rosturi	10	*A*, *Q*
S	Izolaţii terasă	8	*R*
T	Lucrări de tinichigerie	3	*S*
U	Racordări	3	*S*
V	Finisare faţadă	1	*T*, *U*

Graful de evenimente ataşat procesului este trasat în fig. 5.6, în care au fost numerotate evenimentele. A fost necesară introducerea a trei activităţi fictive : (E_9, E_{10}), (E_{11}, E_{12}) şi (E_{16}, E_{17}) pentru a evita arce paralele şi una (E_2, E_{13}) pentru a garanta condiţionarea activităţii R de activitatea A.

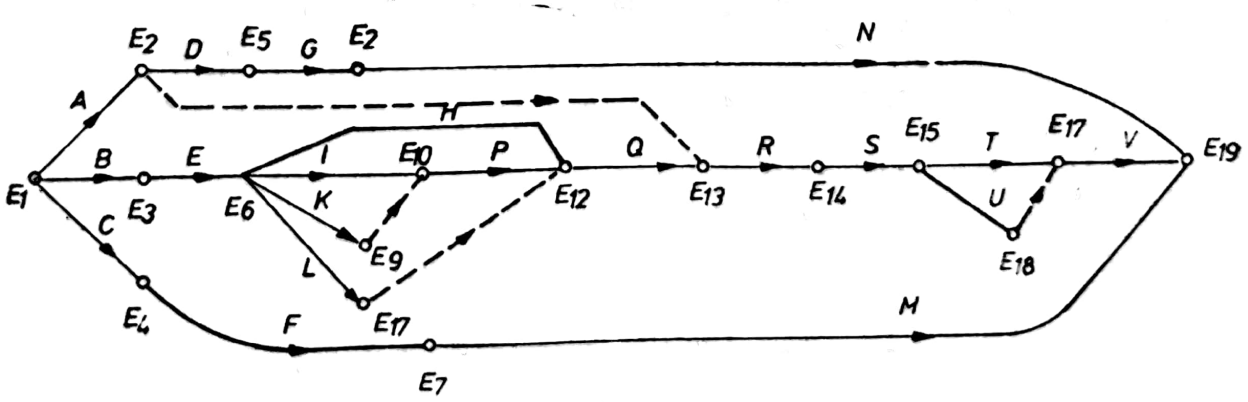


Fig. 5.6.

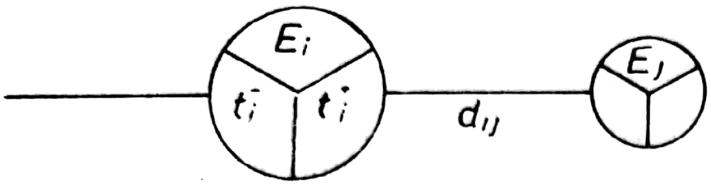


Fig. 5.7.

Deoarece graful obținut este relativ mic (18 noduri), calculul de plan poate fi efectuat direct pe graf. În acest scop, fiecare eveniment E_i din graf se prezintă ca un cerc cu 3 sectoare (fig. 5.7). Pentru calculul datelor timpurii parcurgem graful de la sursa E_1 la destinație și marcăm activitatea utilizată la fiecare eveniment E_i o—|—→—o E_j. Calculul datelor tîrzii se face parcurgînd graful de la destinație la sursă și marcînd activitatea folosită la fiecare eveniment E_i o—×→—o E_j. Duratele activităților sînt înscrise sub arcele corespunzătoare.

Calculele pot fi urmărite pe fig. 5.8, unde momentul de start al procesului este $t_1^- = 0$. Astfel, de exemplu

$$t_{12}^- = max\ \{t_6^- + d_{6,12},\ \ t_{10}^- + d_{10,12},\ \ t_{11}^- + d_{11,12}\} =$$

$$= max\ \{21+1,\ 31+4,\ 22+0\} = 35,$$

datorită activității (E_{10}, E_{12}).

Durata critică pentru realizarea procesului este $T_0 = t_{18}^- = 63$. Cu $T^* = T_0 = 63$ s-au determinat datele tîrzii:

$$t_i^+ = min\ \{t_j^+ - d_{ij} \mid E_j \in F(E_i)\}$$

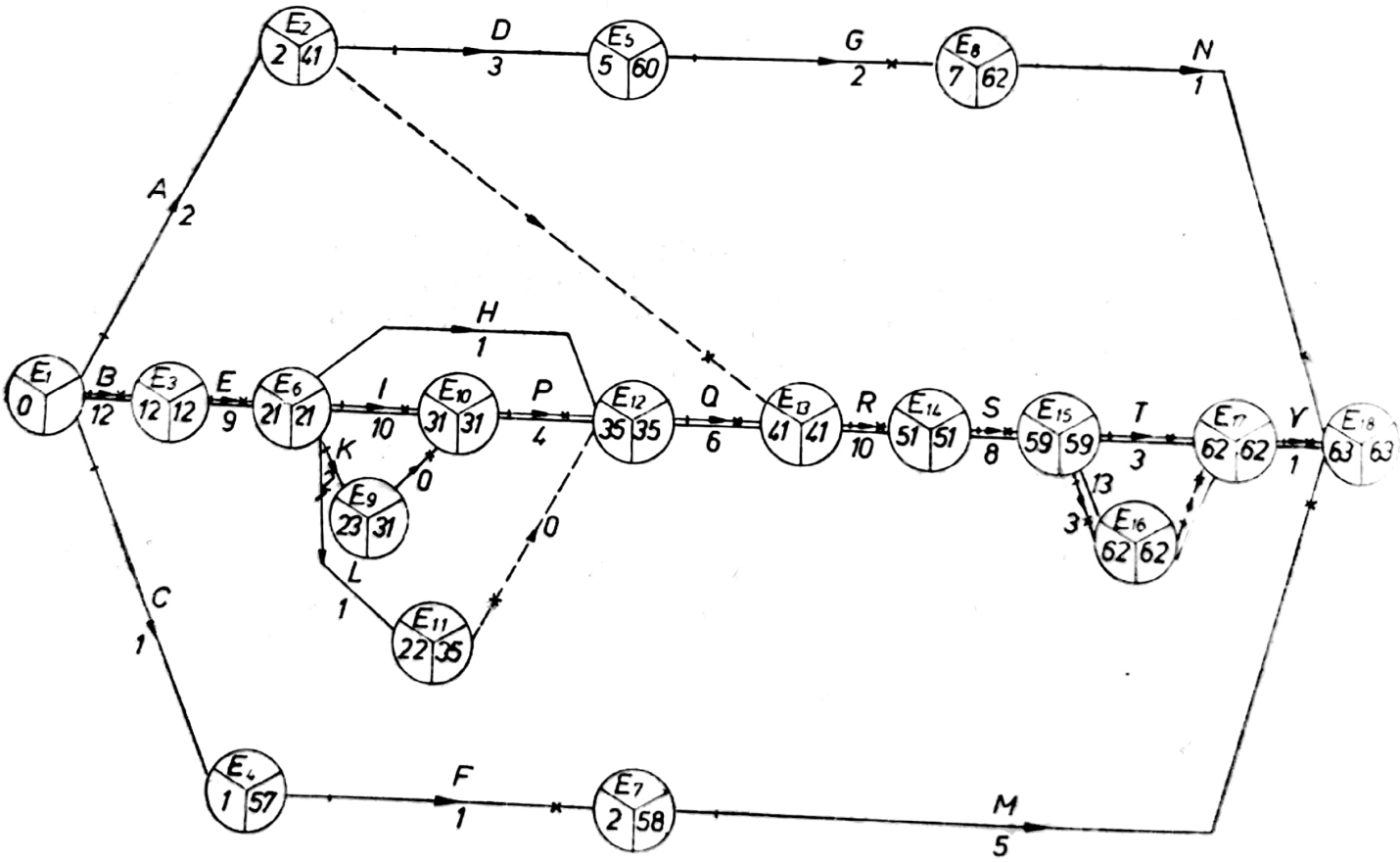


Fig. 5.8.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, de exemplu

$$t_6^+ = min\ \{t_9^+ - d_{69}\ ;\ t_{10}^+ - d_{6,10}\ ;\ t_{11}^+ - d_{6,11}\ ;\ t_{12}^+ - d_{6,12}\} =$$

$$= min\ \{31-2\ ;\ 31-10\ ;\ 35-1\ ;\ 35-1\} = 21$$

datorită activităţii $(E_6,\ E_{10})$.

Drumurile critice se identifică acum imediat : succesiunea de arce dublu marcate de la sursă la destinaţie. Graful evidenţiază două drumuri critice :

$$[E_1,\ E_3,\ E_6,\ E_{10},\ E_{12},\ E_{13},\ E_{14},\ E_{15},\ E_{17},\ E_{18}] \text{ şi}$$

$$[E_1,\ E_3,\ E_6,\ E_{10},\ E_{12},\ E_{13},\ E_{14},\ E_{15},\ E_{16},\ E_{17},\ E_{18}]$$

sau, evidenţiind activităţile critice, $[B,\ E,\ I,\ P,\ Q,\ R,\ S,\ T,\ V]$, respectiv $[B,\ E,\ I,\ P,\ Q,\ R,\ S,\ U,\ V]$. Fluctuaţiile evenimentelor se pot determina de asemenea uşor, calculînd diferenţa marcajelor lor. De axempul, pentru E_{12} avem $t_{12}^+ - t_{12}^- = 0$, iar pentru E_8, $t_8^+ - t_8^- = 62-7=55$.

Calculul rezervelor activităţilor este prezentat în tabelul 5.2.

Tabelul 5.2

Rezervele activităţilor

Activitatea $(E_i,\ E_j)$	d_{ij}	t_i^-	t_i^+	t_j^-	t_j^+	$\tau_{ij}=t_j^+ - t_i^- - d_{ij}$	$\lambda_{ij}=t_j^- - t_i^- - d_{ij}$	$\varepsilon_{ij}=max\ \{0;\ t_j^- - t_i^+ - d_{ij}\}$
$(E_1,\ E_2)$	2	0	0	2	40	38	0	0
$(E_1,\ E_3)$	12	0	0	12	12	0	0	0
$(E_1,\ E_4)$	1	0	0	1	57	56	0	0
$(E_2,\ E_5)$	3	2	40	5	60	55	0	0
$(E_2,\ E_{13})$	0	2	40	41	41	39	39	1
$(E_3,\ E_6)$	9	12	12	21	21	0	0	0
$(E_4,\ E_7)$	1	1	57	2	58	56	0	0
$(E_5,\ E_8)$	2	5	60	7	62	55	0	0
$(E_6,\ E_9)$	2	21	21	23	31	8	0	0
$(E_6,\ E_{10})$	10	21	21	31	31	0	0	0
$(E_6,\ E_{11})$	1	21	21	22	35	12	0	0
$(E_6,\ E_{12})$	1	21	21	35	35	13	13	13
$(E_7,\ E_{16})$	5	2	58	53	63	56	56	0
$(E_9,\ E_{18})$	1	7	62	63	63	55	55	0
$(E_9,\ E_{10})$	0	23	31	31	31	8	8	0
$(E_{10},\ E_{12})$	4	31	31	35	35	0	0	0
$(E_{11},\ E_{12})$	0	22	35	35	35	13	13	0
$(E_{12},\ E_{14})$	6	35	35	41	41	0	0	0
$(E_{13},\ E_{14})$	10	41	41	51	51	0	0	0
$(E_{14},\ E_{15})$	8	51	51	59	59	0	0	0
$(E_{15},\ E_{16})$	3	59	59	62	62	0	0	0
$(E_{16},\ E_{17})$	3	59	59	62	62	0	0	0
$(E_{16},\ E_{17})$	0	62	62	62	62	0	0	0
$(E_{17},\ E_{18})$	1	62	62	63	63	0	0	0

Scanned with OKEN Scanner

Analizînd acest tabel constatăm :

1. drumurile critice sînt drumurile formate din activităţile cu rezerva totală nulă ;

2. graful conţine relativ puţine activităţi cu rezerve libere şi doar o activitate reală, H, are o rezervă independentă ;

3. dacă s-ar folosi întreaga rezervă totală a unei activităţi, de exemplu G, $\tau_{5,8}=55$, considerînd $d'_{5,8}=d_{5,8}+\tau_{5,8}=57$, am avea $t'^{-}_{8}=t^{-}_{7}+d'_{58}=5+57=62$ şi $t'^{-}_{7}-t^{+}_{8}-d'_{58}=0$, ceea ce ar modifica şi rezervele activităţilor adiacente D şi N. Acest lucru nu se întîmplă în cazul activităţii H, care dispune şi de o rezervă liberă.

Pentru a ilustra modul de calcul în graful de activităţi trasăm mai întîi acest graf ataşat procesului analizat (fig. 5.9).

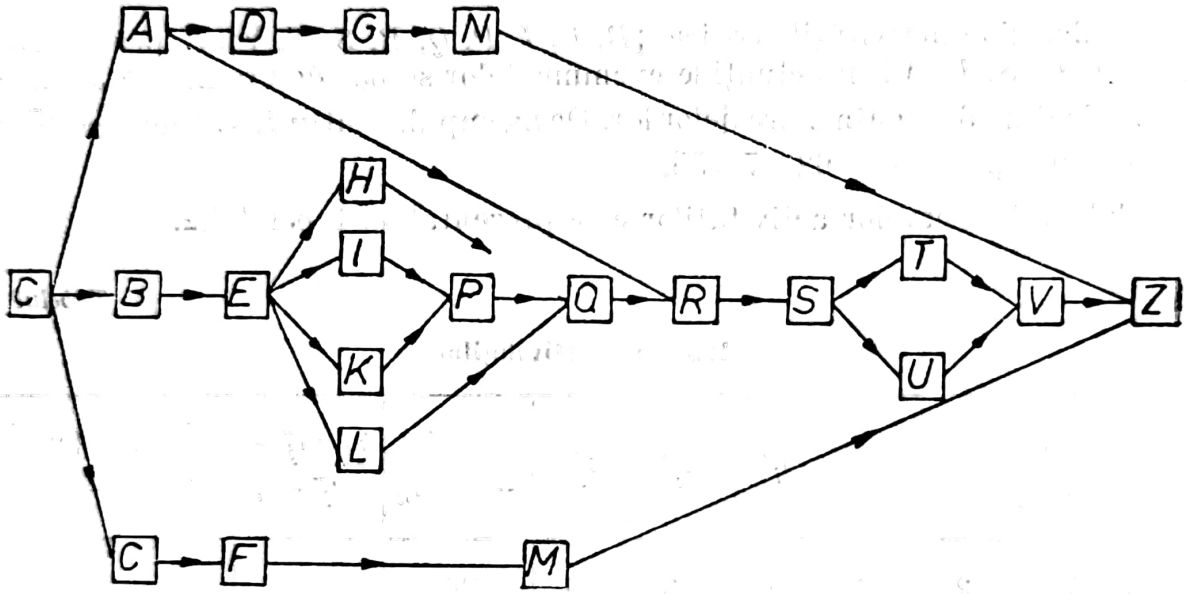


Fig. 5.9.

În graf a fost introdusă o activitate sursă fictivă O care condiţionează activităţile fără precedent A, B, C şi o activitate destinaţie fictivă Z condiţionată de activităţile finale N, M, V din proces.

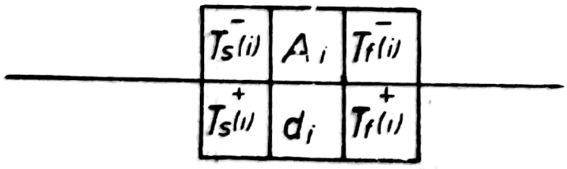


Fig. 5.10.

Pentru a putea efectua calculele, fiecare activitate este reprezentată sub forma unei casete care conţine elementele de calcul (fig. 5.10).

Rezultatele sînt prezentate în graful din fig. 5.11. Determinarea termenelor devreme se face parcurgînd graful în ordinea dată, iar calculul termenelor tîrzii se face parcurgînd graful de la destinaţia Z spre sursa O. Şi aici au fost marcate — în acelaşi fel ca în graful de evenimente — arcele care conduc la termenul cel mai devreme de început, respectiv la termenul cel mai tîrziu de sfîrşit al activităţilor. Evident datele caracteristice unei anumite activităţi sînt aceleaşi în ambele procedee folosite.

În finalul acestor chestiuni legate de planificarea în grafe, se impun cîteva **Observaţii.** 1°. Procesul de planificare nu se încheie odată cu determinarea elementelor necesare cu stabilirea duratei critice, a drumurilor critice şi a activită-

Scanned with OKEN Scanner

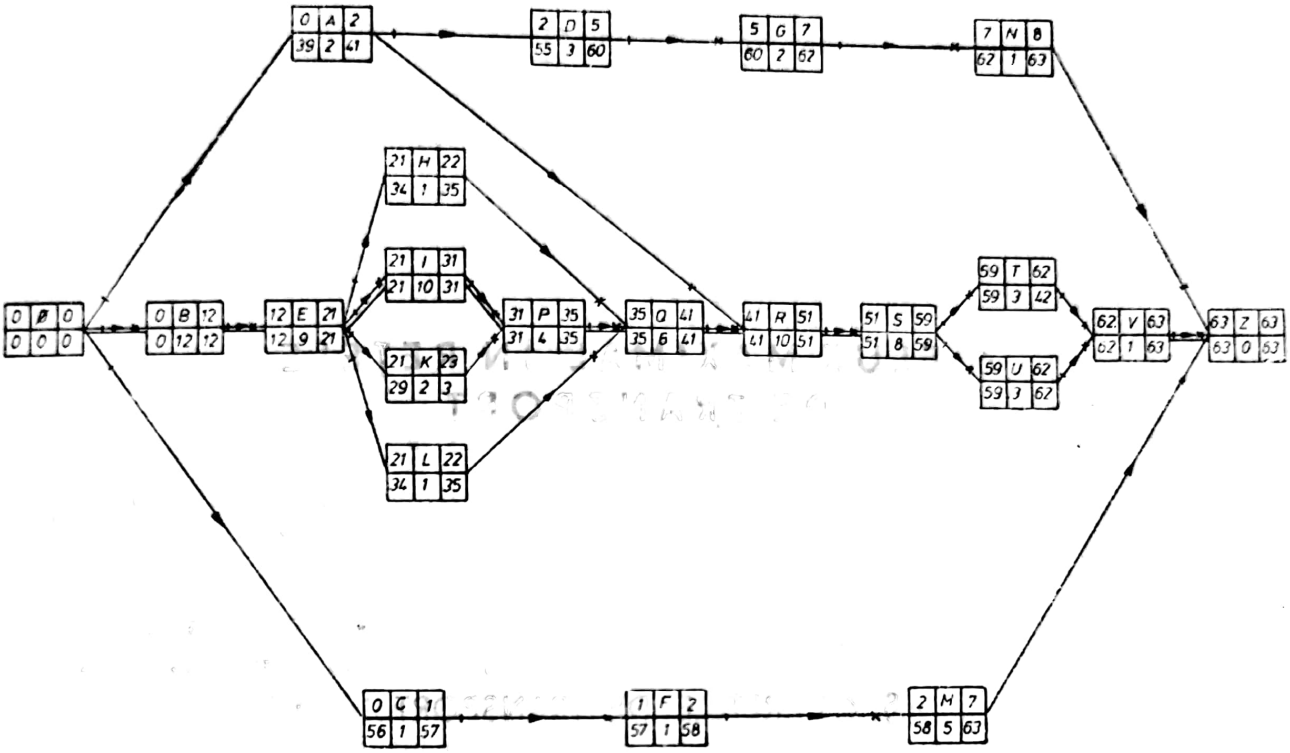


Fig. 5.11.

ţilor critice, ci dimpotrivă, el trebuie reluat la încheierea fiecărei activităţi, pentru că acest moment poate să coincidă cu termenul cel mai devreme al evenimentului, se poate realiza în intervalul de fluctuaţie sau poate apare în afara lui.

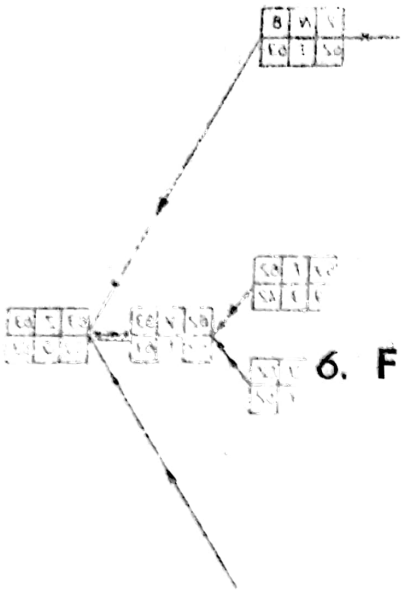
2°. În expunerea principiilor de planificare în grafe am presupus că o activitate nu poate începe decît în momentul încheierii altor activităţi. Acest lucru nu este însă obligatoriu : există situaţii în care o activitate poate începe cînd alta a fost realizată într-o anumită proporţie, în continuare realizîndu-se în paralel. Această situaţie nu neagă cele expuse ; introducerea unui eveniment fictiv „realizarea într-o proporţie dorită a activităţii respective“ o reduce la cea tratată aici.

3°. Metoda drumului critic a fost expusă în ipoteza că duratele activităţilor sînt cunoscute şi numeric determinate ; este cazul determinist al problemei.

Deseori însă, duratele d_{ij} ale activităţilor $A_{ij}=(E_i, E_j)$ sînt aleatoare sau necunoscute în momentul elaborării planului. În acest caz se estimează durata unei activităţi luînd în considerare o valoare optimistă v_{ij}, una pesimistă p_{ij} şi una realistă r_{ij} $(v_{ij} \leqslant r_{ij} \leqslant p_{ij})$ prin relaţia $d_{ij} = \frac{v_{ij}+4\,r_{ij}+p_{ij}}{6}$ Datele timpurii şi tîrzii pentru realizarea unui eveniment sînt acum valorile medii ale unor variabile aleatoare care se determină în baza legii numerelor mari cu aceleaşi metodologii.

4°. Eşalonarea în timp a activităţilor din proces este doar unul din aspectele muncii de planificare. Odată încheiată această etapă se poate pune problema optimizării planului luînd în considerare costul procesului, sau se poate rezolva problema alocării resurselor ş.a.

Scanned with OKEN Scanner



6. FLUX MAXIMAL ÎN REȚELE DE TRANSPORT

§ 6.1. REȚELE DE TRANSPORT

Un graf finit cu n vîrfuri, conex și fără bucle $G=(X, F)=(X, \mathscr{A})$ este o *rețea de transport* dacă :

1°. există o singură sursă $x_1 \in X$, numită și intrare în rețea și o singură destinație $x_n \in X$, numită și ieșire din rețea,

2°. pe mulțimea arcelor $\mathscr{A}$ este definită o funcție cu valori nenegative, $c: \mathscr{A} \to R_+$. Pentru un arc $a \in \mathscr{A}$, numărul $c(a) \geqslant 0$ determinat prin funcția c este *capacitatea arcului* a.

Cu relațiile (1.2) și (1.3) avem

$$\mathscr{A}^-(x_1)=\varnothing \quad \text{și} \quad \mathscr{A}^+(x_n)=\varnothing .$$

Arcele incidente exterior lui x_1, elementele mulțimii $\mathscr{A}^+(x_1)$, sînt *arcele de intrare* în rețea, iar arcele incidente interior lui x_n, elementele mulțimii $\mathscr{A}^-(x_n)$ sînt *arcele de ieșire* din rețea. Uneori, graful care definește o rețea de transport se completează cu *arcul de închidere* $\bar{a}=(x_n, x_1)$, $(\bar{a} \notin \mathscr{A})$, pentru care se consideră o capacitate infinită, $c(\bar{a})=\infty$. Se numește *flux* în rețea o funcție f definită pe mulțimea arcelor $\mathscr{A}$ care satisface relațiile

$$0 \leqslant f(a) \leqslant c(a), \quad \forall a \in \mathscr{A} \tag{6.1}$$

$$\sum_{a \in \mathscr{A}^-(x_i)} f(a) - \sum_{a \in \mathscr{A}^+(x_i)} f(a)=0, \quad \forall x_i \in X. \tag{6.2}$$

Relația (6.2) poate fi interpretată ca o lege de conservare a fluxului : Dacă $f(a)$ este un flux material, cantitatea ce intră într-un vîrf al grafului este egală cu

cantitatea ce-l părăseşte. Dacă se ia în considerare şi arcul de închidere $\bar{a}=(x_n, x_1)$ al reţelei, legea de conservare este aplicabilă în toate vîrfurile reţelei. Dacă se renunţă la arcul de închidere (6.2), nu are sens în sursă şi în destinaţie.

Calculînd fluxul pe arcul de închidere, avem

$$f(\bar{a})=\sum_{a\in\mathcal{A}^+(x_1)} f(a) \text{ în } x_1 \text{ şi}$$

$$f(\bar{a})=\sum_{a\in\mathcal{A}^-(x_n)} f(a) \text{ în } x_n. \text{ Deci}$$

$$\sum_{a\in\mathcal{A}^+(x_1)} f(a)=\sum_{a\in\mathcal{A}^-(x_n)} f(a), \tag{6.3}$$

Pentru un flux f dat, cantitatea de ieşire în sursa reţelei este egală cu cantitatea de intrare în destinaţie şi valoarea definită în (6.3) se numeşte *valoarea fluxului*, $v(f)$.

Observaţie. Dacă capacităţile arcelor sînt numere întregi, pentru flux se consideră de asemenea valori întregi.

Arcul $a\in\mathcal{A}$ se zice *saturat* dacă $f(a)=c(a)$ şi orice drum de la sursa x_1 la destinaţia x_n este saturat dacă conţine cel puţin un arc saturat. Fluxul pentru care orice drum de la x_1 la x_n este saturat, este un *flux complet*.

Exemplul 6.1. În reţeaua de transport din fig. 6.1 au fost înscrise în paranteze drepte capacităţile arcelor şi în faţa lor fluxurile. Arcele saturate au fost eviden-

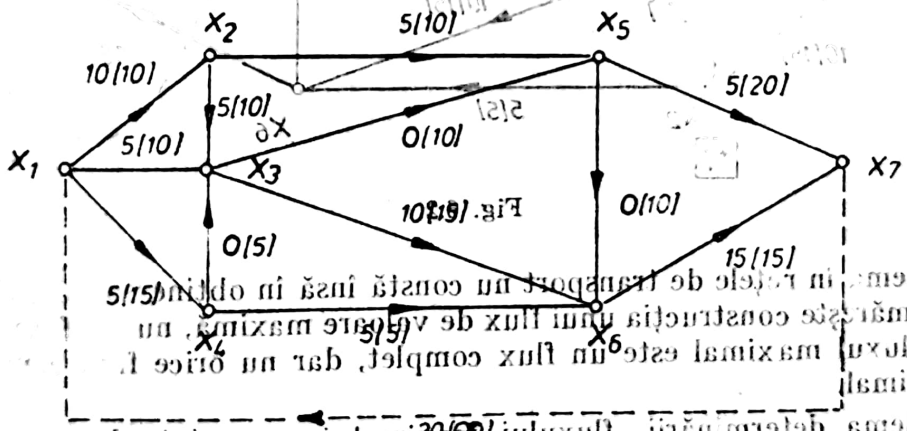


Fig. 6.1.

ţiate prin îngroşare. Arcul de închidere (x_7, x_1) al reţelei a fost desenat printr-o linie întreruptă.

Valoarea fluxului este fluxul pe arcul de închidere : $v(f)=20$. Fluxul astfel construit nu este complet, deoarece drumul $[x_1, x_4, x_3, x_5, x_6]$ nu este saturat. Plecînd de la un flux incomplet, f, poate fi obţinut un flux complet printr-un procedeu iterativ astfel :

— se identifică în rețea un drum de la sursă la destinație nesaturat, fie el D,

— se determină

$$\alpha = \min_{a \in D} \{c(a) - f(a)\}, \tag{6.4}$$

— se construiește un nou flux f' definit prin

$$f'(a) = \begin{cases} f(a) + \alpha, & \text{dacă } a \in D \\ f(a), & \text{dacă } a \notin D. \end{cases}$$

Fluxul f' obținut saturează cel puțin încă un arc.

Acest procedeu continuă pînă ce, eliminînd din rețea arcele saturate, se obține un graf parțial neconex.

Pe drumul $D=[x_1, x_4, x_3, x_5, x_6]$ al rețelei din fig. 6.1. avem $\alpha = min\ \{15-1, 5-0, 10-0, 20-5\}=5$ și procedînd conform procedeului expus se obține fluxul evidențiat în fig. 6.2. Graful parțial obținut prin eliminarea arcelor nesaturate nu este conex și fluxul este complet.

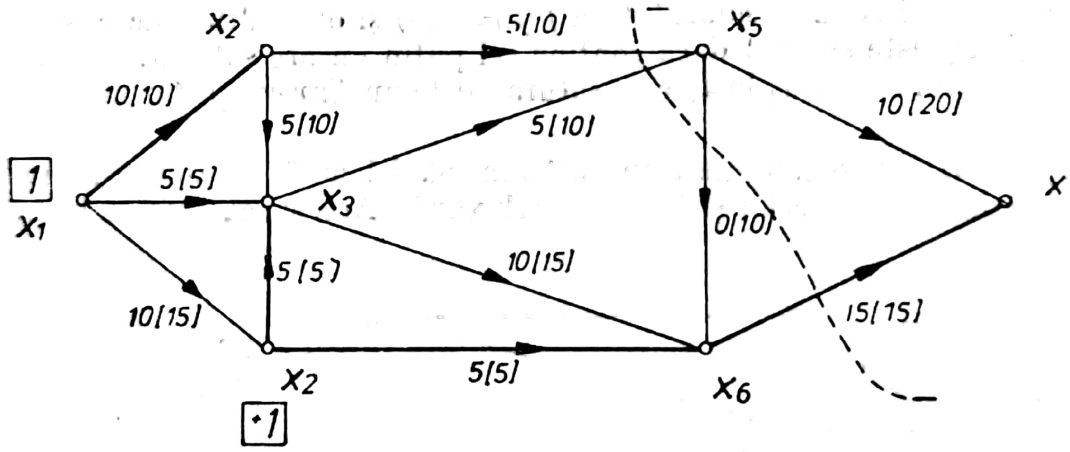


Fig. 6.2.

Problema în rețele de transport nu constă însă în obținerea unui flux complet, ci urmărește construcția unui flux de valoare maximă, numit *flux maximal*. Evident fluxul maximal este un flux complet, dar nu orice flux complet este flux maximal.

Problema determinării fluxului maximal impune introducerea noțiunii de *tăietură în rețea*. Se numește tăietură în rețea mulțimea arcelor incidente interior unei submulțimi de vîrfuri ale rețelei care conține destinația, dar nu conține sursa rețelei. Dacă $Y \subset X$, astfel ca $x_1 \notin Y$ și $x_n \in Y$, tăietura în rețea este

$$\mathcal{A}^-(Y) = \{(x_i, x_j) \in A \mid x_i \notin Y,\ x_j \in Y\}. \tag{6.5}$$

Capacitatea tăieturii este suma capacităților arcelor componente:

$$c[\mathcal{A}^-(Y)] = \sum_{a \in \mathcal{A}^-(Y)} c(a). \tag{6.6}$$

Exemplul 6.2. Alegînd în rețeaua din fig. 6.2 $Y=\{x_5, x_7\}$, avem $\mathcal{A}^-(Y)=\{(x_2, x_5), (x_3, x_5), (x_6, x_7)\}$ și

$$c\,[\mathcal{A}^-(Y)]=c\,(x_2,\ x_5)+c\,(x_3,\ x_5)+c\,(x_6,\ x_7)=10+10+15=25.$$

Constatăm că $c\,[A^-(Y)]<v(f')=35$ și că fluxul f' din rețea saturează un arc al tăieturii, (x_6, x_7), celelalte nu.

§ 6.2. ALGORITMUL FORD-FULKERSON

Teorema 6.1. (Ford-Fulkerson). *Într-o rețea de transport dată $G=(X,\mathcal{A}, c)$, valoarea maximă a fluxului este egală cu capacitatea minimă a tăieturilor în rețea.*

$$\max_f v(f)=\min\ \{c\,[\mathcal{A}^-(Y)] \mid x_1\notin Y,\ x_n\in Y\}. \tag{6.7}$$

Fiind dată o tăietură, orice flux din rețea trebuie s-o străbată, saturînd unele arce, altele nu. Dacă fluxul f saturează toate arcele tăieturii $\mathcal{A}^-(Y)$, are loc $v(f)=c\,[\mathcal{A}^-(Y)]$, iar dacă există arce ale tăieturii nesaturate de flux, atunci $v(f)<c\,[\mathcal{A}^-(Y)]$. Rezultă că pentru orice flux (compatibil cu rețeaua) și orice tăietură în rețea are loc

$$v(f)\leqslant c\,[\mathcal{A}^-(Y)]. \tag{6.8}$$

Relația (6.8) arată că dacă există un flux f^* și o tăietură $\mathcal{A}^-(Y^*)$ pentru care $v(f^*)=c\,[\mathcal{A}^-(Y^*)]$, fluxul f^* are cea mai mare valoare posibilă și tăietura $\mathcal{A}^-(Y^*)$ este tăietura cu capacitatea minimă.

În concordanță cu teorema 6.1 relația (6.7) poate fi privită ca relația de definiție a fluxului maximal și obținerea lui se reduce la identificarea unei tăieturi de capacitate minimă.

În scopul obținerii fluxului maximal este necesar un *procedeu de ameliorarea unui flux complet.*

Pasul 1. Fiind dat un flux complet f în rețeaua $G=(X, \mathcal{A}, c)$, se marchează vîrfurile rețelei printr-un procedeu iterativ, astfel

1^0. Sursa x_1 se marchează cu „1".

2^0. Dacă x_i este un vîrf marcat și

a) $(x_i, x_j)\in\mathcal{A}$, iar $f(x_i, x_j)<c(x_i, x_j)$, vîrful x_j se marchează cu „$+i$",

b) $(x_k, x_i)\in\mathcal{A}$, iar $f(x_k, x_j)>0$, vîrful x_k se marchează cu „$-i$".

3^0. Dacă x_i este un vîrf marcat și

a) $(x_i, x_j)\in\mathcal{A}$, iar $f(x_i, x_j)=c(x_i, x_j)$ (arcul este saturat), vîrful x_j nu poate fi marcat,

b) $(x_k, x_i)\in\mathcal{A}$, iar $f(x_k, x_i)=0$, vîrful x_k nu poate fi marcat.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă acest procedeu permite marcarea destinației x_n există un lanț de la sursă la destinație cu vîrfurile marcate. Fie L un asemenea lanț, în care notăm L^+ arcele, cu vîrful final marcat cu $+$ (regula 2^0 a) și L^- arcele cu vîrful inițial marcat $-$ (regula 2^0 b).

Un lanț L de la sursă la destinație cu vîrfuri marcate în care $L^-=\emptyset$, este un drum de la x_1 la x_n.

Pasul 2.

1^0. Se calculează

$$\varepsilon=\min_{a\in L^+}\{c(a)-f(a)\} \quad \text{și} \quad \delta=\min_{a\in L^-}\{f(a)\}$$

și se determină $\alpha=\min\{\varepsilon, \delta\}$.

2^0. Se definește

$$f'(a)=\begin{cases} f(a)+\alpha, & \text{dacă } a\in L^+ \\ f(a)-\alpha, & \text{dacă } a\in L^- \\ f(a), & \text{dacă } a\notin L \end{cases}$$

și s-a obținut un nou flux f' pentru care $v(f')=v(f)+\alpha>v(f)$, deoarece lanțul se termină întotdeauna cu un arc de ieșire (x_n fiind marcat cu $+$).

Cu acest procedeu de ameliorare a unui flux complet, *algoritmul Ford-Fulkerson* pentru determinarea fluxului maximal într-o rețea de transport se enunță astfel.

Etapa 1. Se introduce în rețeaua $G=(X, \mathcal{A}, c)$ un flux oarecare f, compatibil cu capacitatea arcelor (6.1).

Etapa 2. Se construiește un flux complet f (de exemplu prin procedeul expus în § 6.1).

Etapa 3. Fluxului complet obținute f i se aplică procedeul de ameliorare descris mai sus, obținîndu-se alt flux complet f_1. Acesta este supus aceluiași procedeu, obținîndu-se un flux complet f_2 ș.a.m.d. Procesul continuă pînă ce pentru un flux complet f^0 procedeul de marcare a vîrfurilor rețelei nu atinge destinația x_n. Fluxul f^0 astfel construit este flux maximal.

Într-adevăr, notînd $Z\subset X$ submulțimea vîrfurilor nemarcate, $x_1\notin Z$ și $x_n\in Z$, rezultă că Z definește o tăietură în rețea $\mathcal{A}^-(Z)$. Obținem, notînd $\mathcal{A}^+(Z)$ mulțimea arcelor incidente exterior la Z,

$$v(f^0)=\sum_{a\in\mathcal{A}^-(Z)} f^0(a)-\sum_{a\in\mathcal{A}^+(Z)} f^0(a).$$

Dar $\sum_{a\in\mathcal{A}^-(Z)} f^0(a)=\sum_{a\in\mathcal{A}^-(Z)} c(a)$, pentru că altfel s-ar putea continua procedeul de marcare a vîrfurilor din Z prin regula (2^0a), și $\sum_{a\in\mathcal{A}^+(Z)} f^0(a)=0$, pentru că altfel ar putea fi aplicată regula (2^0 b) de marcare a vîrfurilor din Z. În consecință, $v(f^0)=c[\mathcal{A}^-(Z)]$

și în conformitate cu teorema 6.1, fluxul f^0 este maximal și $\mathcal{A}^-(Z)$ este o tăietură de capacitate minimă.

Observație. Distribuția optimă pe rețea a fluxului maximal nu trebuie să fie unică, deoarece rețeaua poate admite mai multe tăieturi de capacitate minimă. Pe de altă parte, o tăietură de capacitate minimă poate fi generată de distribuții diferite pe arcele rețelei a aceluiași flux.

Exemplul 6.3. Pentru rețeaua din exemplul 6.1, etapa 1 a algoritmului este prezentată în fig. 6.1, iar în fig. 6.2 s-a obținut un flux complet. Pentru a aplica etapa a treia, marcăm $\boxed{1}$ sursa rețelei (fig. 6.2). Singurul vîrf ce mai poate fi marcat este x_4, și anume cu regula (2^0a), $\boxed{+1}$. Oricum, destinația x_7 este inaccesibilă pentru marcaj. Înseamnă că fluxul complet obținut este maximal. Mulțimea vîrfurilor nemarcate este $Z=\{x_2, x_3, x_5, x_6, x_7\}$ și tăietura definită de Z, $\mathcal{A}^-(Z)=\{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_4, x_3), (x_4, x_6)\}$ are capacitatea $c[\mathcal{A}^-(Z)]=10+5+5=25$. Fluxul maximal are deci valoarea 25.

Exemplul 6.4. Trei furnizori x_1, x_2, x_3 dispun de un bun în cantitățile 50, 50 și 40 unități. Bunul este solicitat de patru beneficiari y_1, y_2, y_3, y_4 în cantități de cîte 50 unități. Mijloacele de transport existente la furnizori pot asigura transportul bunurilor pe diferite rute în conformitate cu capacitățile de transport indicate în tabelul 6.1.

Tabelul 6.1

Furnizor \ Beneficiar	y_1	y_2	y_3	y_4	Disponibil
x_1	10	10	20	20	50
x_2	0	20	0	10	50
x_3	15	15	0	20	40
Necesar	50	50	50	50	

Se cere realizarea unui plan de transport care să garanteze livrarea către beneficiari a cantității maxime de bunuri.

Problema poate fi modelată printr-o rețea de transport astfel: furnizorii și beneficiarii constituie vîrfuri ale rețelei, rutele de transport (de la furnizori la beneficiari) sînt arce; dacă capacitatea de transport este pozitivă, aceasta este considerată capacitatea arcului de rețea. Se consideră o sursă (fictivă) x_0 cu arce incidente exterior spre vîrfurile furnizori de capacitate egală cu disponibilul furnizorului respectiv și o destinație (fictivă) y_0 cu arce incidente interior de la vîrfurile-beneficiari cu capacitatea egală cu necesarul furnizorului respectiv. În această rețea de transport se cere determinarea fluxului maximal și se poate aplica algoritmul Ford-Fulkerson.

Scanned with OKEN Scanner

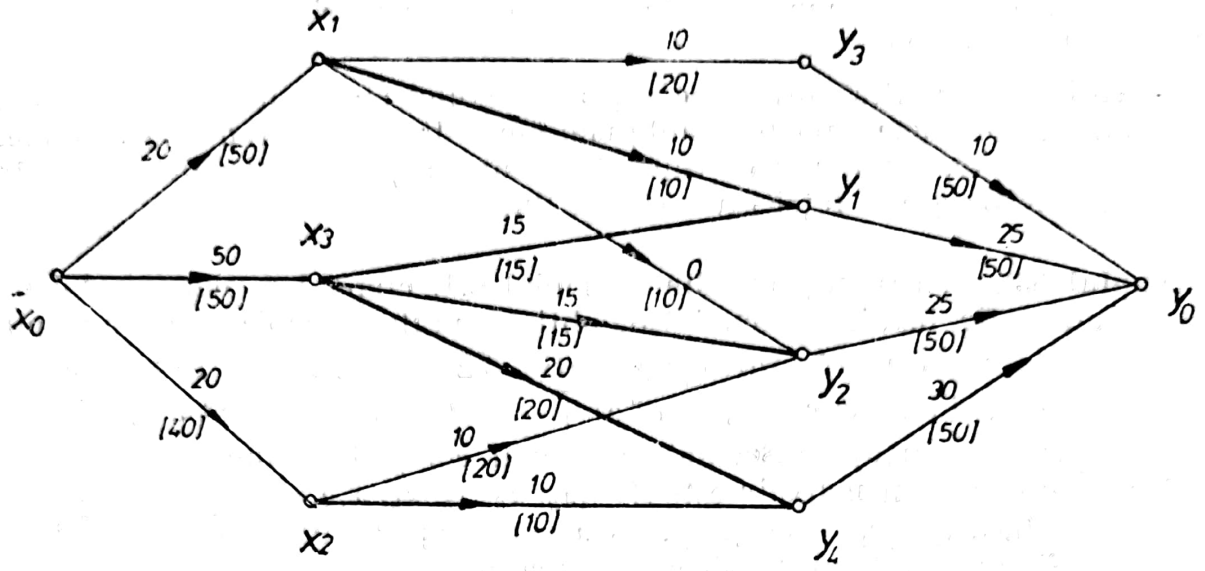


Fig. 6.3.

Etapa 1. a algoritmului, construcția unui flux în rețea, este ilustrată în fig. 6.3, în care capacitatea fiecărui arc este evidențiată într-o paranteză dreaptă și arcele saturate sînt desenate îngroșat.

Etapa 2. a algoritmului, obținerea unui flux maximal, este ilustrată în fig. 6.4.

Pe drumul $D_1=[x_0, x_1, y_3, y_0]$ avem

$$\alpha_1=min\ \{c(a)-f(a) \mid a\in D_1\}=min\ \{c(x_0, x_1)-f(x_0, x_1)\ c(x_0, y_3)-$$
$$-f(x_1, x_3),\ c(y_3, y_0)-f(y_3, y_0)\}=min\ \{50-20, 20-10, 50-10\}=10$$

și mărind fluxul de-a lungul lui D_1 cu 10 se saturează arcul (x_1, y_3).

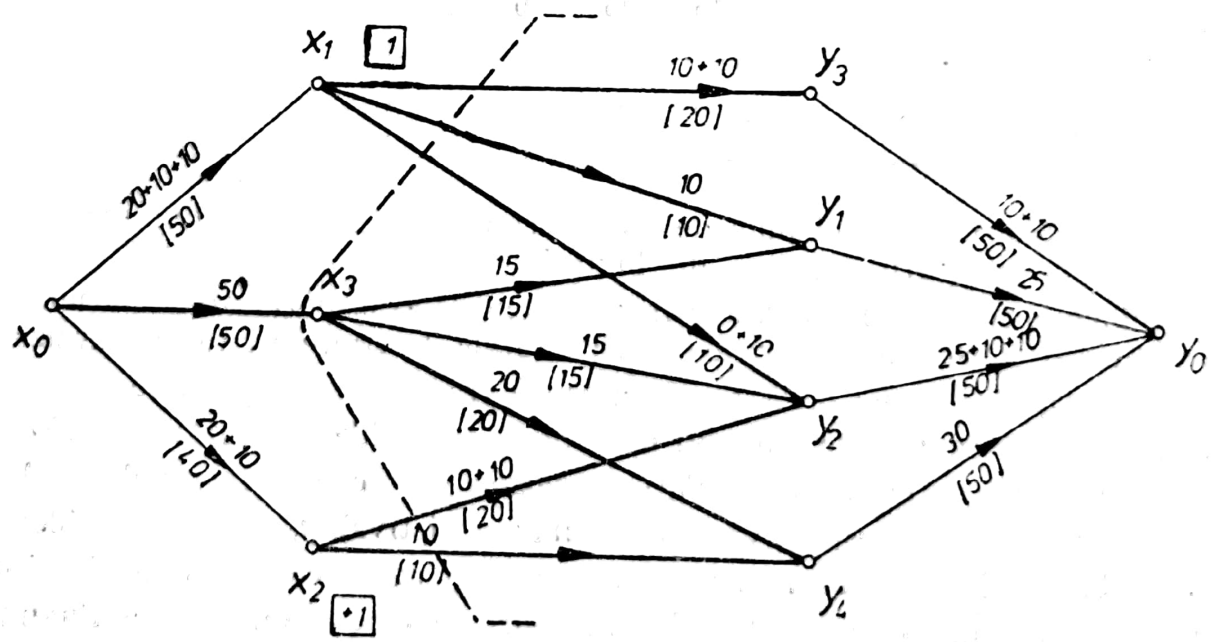


Fig. 6.4.

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog pe $D_2=[x_0, x_1, y_2, y_0]$ fluxul poate fi majorat cu 10 unități saturîndu-se arcul (x_1, y_2), iar pe $D_3=[x_0, x_2, y_2, y_0]$ este posibilă majorarea fluxului de asemenea cu 10 unități, ceea ce saturează arcul (x_2, y_2). În acest moment, graful parțial obținut prin suprimarea arcelor nesaturate este neconex și fluxul este complet.

În etapa a treia marcăm vîrful x_0 cu 1 și mai putem marca doar x_1 și x_2 (fig. 6.4), pe arcele nesaturate (x_0, x_1) și (x_0, x_2), ceea ce înseamnă că fluxul obținut este maximal. Valoarea sa se poate determina însumînd fluxurile de pe arcele de ieșire din rețea sau pe arcele de intrare în rețea : $v(f)=120$. Mulțimea vîrfurilor nemarcate în momentul final $Z=\{x_3, y_1, y_2, y_3, y_4, y_0\}$ determină tăietura de capacitatea minimă (fig. 6.4)

$$\mathcal{A}^-(Z)=\{(x_1, y_3), (x_1, y_2), (x_1, y_2), (x_0, x_3), (x_2, y_2), (x_2y_4)\}.$$

Se constată că $c[\mathcal{A}^-(Z)]=120=v(f)$.

Revenind la problema formulată, se remarcă faptul că nici un beneficiar nu primește întreaga cantitate solicitată și doar furnizorul x_3 expediază întreaga cantitate de bunuri de care dispune. Pentru satisfacerea solicitărilor beneficiarilor se impune deci o regrupare a mijloacelor de transport la furnizori.

Scanned with OKEN Scanner

7. CUPLAJUL MULȚIMILOR DISJUNCTE

§ 7.1. CUPLAJE ÎN GRAFURI BIPARTITE

Fie mulțimile disjuncte $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ și $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ și o aplicație $F: X \to \mathcal{P}(Y)$. Tripletul $G=(X, Y, F)$ definește un *graf bipartit* ale cărei vîrfuri sînt elementele mulțimii $X \cup Y$ și pentru care mulțimea arcelor este

$$\mathcal{A}=\{(x_i, y_j) \in X \times Y \mid y_j \in F(x_i)\}.$$

În graful bipartit astfel definit, $\mathcal{A}^-(x_i)=\emptyset$, $\forall x_i \in X$ și $\mathcal{A}^+(y_j)=\emptyset$, $\forall y_j \in Y$, deci $\mathcal{A}^-(X)=\mathcal{A}^+(Y)=\emptyset$.

O submulțime U a mulțimii arcelor $\mathcal{A}$ este un *cuplaj* dacă nu conține arce adiacente. Dacă $X^0=\{x_i \in X \mid \exists (x_i, y_k) \in U\}$ este mulțimea vîrfurilor inițiale ale arcelor din cuplajul U și $Y^0=\{y_j \in Y \mid \exists (x_h, y_j) \in U\}$ este mulțimea vîrfurilor finale ale arcelor din cuplajul U, acesta cuplează X^0 *pe* Y^0 sau X^0 *în* Y. $X^0=X$ și $Y^0 \subset Y$ înseamnă că U cuplează X în Y, iar $X^0 \subset X$ și $Y^0=Y$ arată că Y este cuplat în X. Un cuplaj U în graful bipartit $F=(X, Y, F)$ este *complet* dacă cuplează X în Y sau Y în X.

Fiind dată o mulțime finită X, notăm prin *card* X numărul elementelor ei.

Teorema 7.1. *Condiția necesară și suficientă ca în graful bipartit* $G=(X, Y, F)$ *să existe un cuplaj al lui* X *în* Y *este ca pentru orice submulțime de vîrfuri* $X^0 \subset X$ *să avem*

$$\text{card } X^0 \leqslant \text{card } F(X^0) \tag{7.1}$$

unde $F(X^0)=\{y_j \in Y \mid y_j \in F(x_i \in X^0)\}$.

Necesitatea este evidentă. Dacă există un cuplaj complet al lui X în Y pentru orice submulțime $X^0 \subset X$ are loc (7.1), căci altfel ar exista $x_h \in X$ cu $F(x_h)=\emptyset$ și X nu s-ar putea cupla în Y.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a demonstra suficiența condiției (7.1), procedăm prin inducție asupra numărului m delemenete din X.

Pentru $m=1$, $X=\{x\}$, și deoarece card $F(x)\geqslant 1$ conform ipotezei (7.1), există un arc de la x la un vîrf din Y și acesta definește cuplajul lui X în Y.

Presupunem acum că în orice graf bipartit cu card $X\leqslant m-1$ în care este îndeplinită condiția (7.1) există un cuplaj al lui X în Y. Pentru a demonstra valabilitatea proprietății în graful bipartit cu card $X=m$, deosebim două situații:

a.) Dacă card $X^0<$card $F(X^0)$ pentru orice submulțime $X^0\subset X$, există cel puțin un vîrf $x_h\in X$ cu cel puțin două arce incidente exterior lui, (x_h, y_k) și (x_h, y_k). Eliminînd din G vîrful x_h și unul din vîrfurile y_k sau $y_{k'}$, se obține un graf bipartit cu card $(X-\{x_h\})=m-1$ în care există, conform ipotezei inducției, un cuplaj de la $X-\{x_h\}$ la $Y-\{y_k\}$. Dar atunci există — prin arcul (x_h, y_k) și un cuplaj al lui X în Y.

b) Dacă există o submulțime $X^*\subset X$ cu card $X^*=$card $F(X^*)$, conform ipotezei (7.1) există un cuplaj al lui X^* în $F(X^*)$ în subgraful lui G definit de X^* și $F(X^*)$. Presupunem că în subgraful rămas, definit de $X-X^*$ și $Y-F(X^*)$, nu se cuplează $X-X^*$ în $Y-F(X^*)$. Înseamnă că există o submulțime $\bar{X}\subset X-X^*$ cu card $\bar{X}>$card $F(\bar{X})$. Dar atunci, pentru $X^*\cup\bar{X}$ avem card $(X^*\cup\bar{X})>$card $F(X^*\cup\bar{X})$, contrar ipotezei făcute (7.1).

Observații. 1°. În enunțul teoremei (7.1) se pune problema cuplării lui X în Y. Inversînd în $G(X, Y, F)$ sensul arcelor se obține *graful transpus* în care se enunță echivalent cu (7.1) condiția necesară și suficientă pentru cuplarea lui Y în X.

2°. În graful bipartit dat $G=(X, Y, F)$ pentru orice submulțime $X^0\subset X$ avem $F(X^0)\leqslant Y$. Pentru a putea cupla X în Y este necesar, dar nu suficient, ca card $X\leqslant$ card Y.

3°. Dacă un graf bipartit satisface condiția (7.1), el admite un cuplaj complet. Numim *cuplaj maximal* un cuplaj care constă din cel mai mare număr posibil de arce. Problema determinării cuplajului maximal poate fi pusă și în grafe bipartite care nu admit cuplaj complet.

7.1.1. CUPLAJ MAXIMAL ȘI FLUX MAXIMAL

Considerăm un graf bipartit $G(X, Y, F)$ cu card $X=m$ și card $Y=n$ și-i atașăm o rețea de transport astfel: vîrfurile $x_i\in X$, $i=1\div m$ sînt vîrfurile finale ale arcelor (x_0, x_i) incidente exterior unei surse (fictive) x_0, iar vîrfurile $y_j\in Y$, $j=1\div n$ sînt vîrfuri inițiale pentru arcele (y_j, y_{n+1}) incidente interior unei destinații (fictive) y_{n+1}. Arcele grafului dat, $(x_i\ y_j)\in\mathcal{A}$ au capacitatea ∞ iar arcele de intrare, (x_0, x_i), $i=1\div m$ și arcele de ieșire (y_j, y_{n+1}), $j=1\div n$, din rețea au capacitatea 1.

Teorema 7.2. *Condiția necesară și suficientă ca în graful bipartit $G(X, Y, F)$ să existe un cuplaj (complet) al lui X în Y este ca în rețeaua asociată grafului valoarea fluxului maximal să coincidă cu numărul vîrfurilor din X*

$$\max\{v(f)\}=\text{card } X. \tag{7.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a demonstra necesitatea condiției presupunem că în $G=(X, Y, F)$ există un cuplaj al lui X în Y. Conform teoremei 7.2 înseamnă că pentru orice submulțime $X^0 \subset X$ avem card $X^0 \leqslant$ card $F(X^0)$. Considerăm acum o tăietură arbitrară în rețeaua asociată grafului, generată de mulțimea de vîrfuri $Z=X^0 \cup Y_1 \cup \{y_{n+1}\}$, unde $X^0 \subset X$ și $Y_1 \subset Y$ sînt arbitrare. Capacitatea tăieturii este

$$c[\mathcal{A}^-(Z)]=\text{card}\ (X-X^0)+\text{card}\ Y_1+\infty.$$

Termenul ∞ se datorează arcelor din graf incidente exterior mulțimii X^0 și incidente interior la mulțimea $Y-Y_1$. Pentru ca tăietura să aibă o capacitate cît mai mică ea nu trebuie să conțină astfel de arce, ceea ce înseamnă că este necesar ca card $F(X^0) \leqslant$ card Y_1. Capacitatea unei asemenea tăieturi este deci

$$c[\mathcal{A}^-(Z)]=\text{card}\ (X-X^0)+\text{card}\ Y_1=\text{card}\ X-\text{card}\ X^0+\text{card}\ Y_1 \geqslant$$

$$\geqslant \text{card}\ X-\text{card}\ X^0+\text{card}\ F(X^0).$$

Dar card $X^0 \leqslant$ card $F(X^0)$, conform ipotezei, și

$$c[\mathcal{A}^-(Z)] \geqslant \text{card}\ X,$$

ceea ce înseamnă că mulțimea capacităților tuturor tăieturilor din rețea este mărginită inferior de card X.

În rețea există însă o tăietură $\mathcal{A}^-(X)$ cu capacitatea

$$c[\mathcal{A}^-(X)]=\text{card}\ X=min\ \{c[\mathcal{A}^-(Z)] \mid Z \subset X \cup Y \cup \{y_{n+1}\}\}$$

și conform teoremei 6.1 (Ford-Fulkerson) fluxul maxim f^0 prin rețea are valoarea $v(f^0)=$card X.

Reciproc, presupunînd că are loc (7.2) să arătăm că există un cuplaj al lui X în Y. Dacă n-ar exista un cuplaj al lui X în Y, în conformitate cu teorema 7.1 ar exista submulțimea $X^0 \subset X$ pentru care card $X^0>$card $F(X^0)$. Dar atunci, considerînd în rețeaua atașată grafului tăietura generată de mulțimea de vîrfuri $Z=(X-X^0) \cup F(X^0)$, aceasta ar avea capacitatea $c[\mathcal{A}^-(Z)]=$card $X-$card X^0+ $+$card $F(X^0)<$card X, absurd, căci capacitatea minimă a unei tăieturi este, conform teoremei Ford-Fulkerson, egală cu valoarea fluxului maxim, iar aceasta este în baza ipotezei egală cu card X. Astfel, condiția (7.2) este și suficientă pentru existența unui cuplaj al lui X în Y.

Observație. Teorema 7.2 oferă un procedeu practic pentru construcția unui cuplaj complet într-un graf bipartit, dacă există un asemenea cuplaj. Se construiește rețeaua atașată grafului bipartit și, cu ajutorul algoritmului Ford-Fulkerson, se determină un flux maximal. Dacă graful bipartit nu conține un cuplaj complet, se obține un cuplaj maximal.

Procedeul oferit de teorema 7.2 pentru obținerea unui cuplaj maximal poate fi utilizat și în matricea grafului bipartit. Considerăm graful bipartit $G=(X, Y, F)$ cu card $X=m$ și card $Y=n$. *Matricea grafului bipartit* este o matrice B de tip $m \cdot n$, ale cărei elemente b_{ij} se definesc prin

$$b_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad y_j \in F(x_i) \\ 0, & \text{dacă} \quad y_j \notin F(x_i). \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Procedeul pentru obținerea unui cuplaj maximal în graful bipartit se desfășoară astfel.

Pasul 1. În matricea B se marchează elemente egale cu 1, astfel încît în fiecare linie și fiecare coloană să fie cel mult un element marcat. Elementele marcate, în număr de t, determină un cuplaj de t arce. Dacă $t=min$ {card X, card Y}, cuplajul este complet.

Dacă $t<min$ {card X, card Y}, se trece la

Pasul 2. Se evidențiază prin marcare liniile și coloanele matricii B care nu conțin elemente marcate. Fie $b_{ij}=1$ un element marcat.

a) Dacă există $b_{ik}=1$ în coloana k marcată și elementul $b_{hj}=1$ în linia h marcată, se elimină marcajul elementului b_{ij} și se adaugă elementele marcate b_{ik} și b_{hj}. Se obține astfel un cuplaj cu un arc mai mult decît în cuplajul inițial.

b) Dacă există $b_{ik}=1$ în coloana k marcată și $b_{hj}=1$ în linia h marcată, dar există pentru $b_{hr}=1$ marcat un element $b_{sr}=1$ pe linia marcată, se elimină marcajele elementelor b_{ij} și b_{hr} și se adaugă marcajele elementelor b_{ik}, b_{hj} și b_{sr}. Ca și în cazul precedent, numărul arcelor din cuplaj crește cu unitatea.

Acest proces continuă pînă ce numărul arcelor din cuplaj este $t=min$ {card X, card Y} cînd s-a realizat un cuplaj complet, sau nu mai este aplicabil și graful nu admite un cuplaj complet, dar s-a obținut un cuplaj maximal.

Exemplul 7.1. Considerăm graful bipartit $G=(X, Y, F)$ din fig. 7.1.

În matricea B a grafului am marcat elemente egale cu 1 prin încercuire și liniile și coloanele fără elemente marcate, cu o steluță. Se constată că elementele marcate definesc un cuplaj format din 4 arce. Aplicînd regula de transfer a., descrisă în *Pasul 2* al procedeului pentru elementul marcat $b_{54}=1$, se obține un cuplaj format din 5 arce și cum card $X=6$ și card $Y=5$, cuplajul este complet. Se realizează cuplarea lui Y în X, vîrful x_4 rămînînd izolat (fig. 7.2).

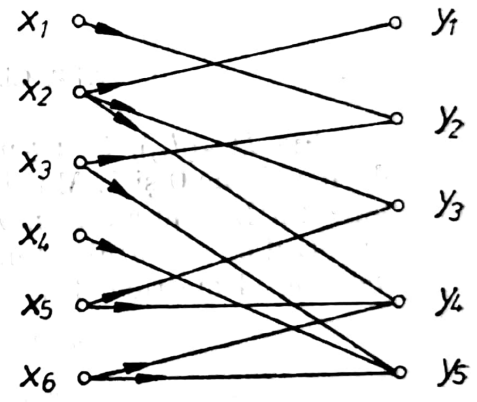


Fig. 7.1.

B=

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
x_1	0	(1)	0	0	0	
x_2	(1)	0	1	1	0	
x_3	0	1	0	0	(1)	
x_4	0	0	0	0	1	*
x_5	0	0	1	(1)	0	
x_6	0	0	0	1	1	*
			*			

a

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0	(1)	0	0	0
x_2	(1)	0	1	1	0
x_3	0	1	0	0	(1)
x_4	0	0	0	0	1
x_5	0	0	(1)	1	0
x_6	0	0	0	(1)	1

b

Fig. 7.2.

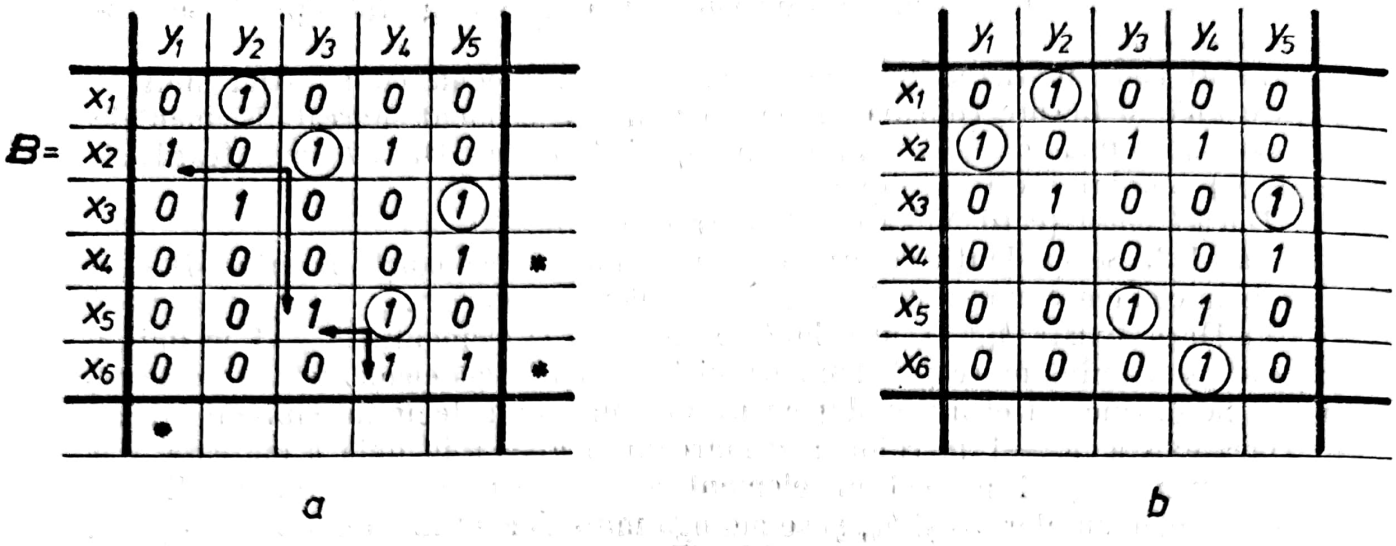


Fig. 7.3.

În figura 7.3. este ilustrată regula *b*, de transfer din *Pasul 2* al procedeului.

7.1.2. CLUPLAJ MAXIMAL ŞI SUPORT MINIMAL

Fie $D=(d_{ij})$, $i=1\div m$, $j=1\div n$ o matrice ale cărei elemente nu pot lua decît valorile 0 şi 1. Mulţimea liniilor şi coloanelor care conţin toate elementele nule din D se numeşte *suport al matricii* D. Notăm un suport al lui D cu $S(D)$. Suportul cu numărul cel mai mic de elemente (linii şi coloane) se numeşte *suport minimal* al matricii. Dacă $\varphi(D)$ este mulţimea suporturilor matricii D, notăm

$$\sigma(D)=min\ \{\text{card}\ S(D) \mid S(D)\in\varphi(D)\}.$$

Matricea D poate fi reprezentată printr-un graf bipartit, notînd x_i, $i=1\div m$ liniile şi y_j, $j=1\div n$ coloanele ei şi considerînd arce perechile (x_i, y_j) pentru care $d_{ij}=0$. Un cuplaj al grafului bipartit astfel construit este un *cuplaj al matricii* D. Fie $k(D)$ numărul arcelor din cuplajul maximal al matricii.

Teorema 7.3. *Numărul elementelor suportului minimal al unei matrici* D *(cu elementele egale cu* 0 *sau* 1*) este egal cu numărul elementelor cuplajului ei maximal*:

$$\sigma(D)=k(D). \tag{7.3}$$

Fie X mulţimea liniilor şi Y mulţimea coloanelor matricii D şi $S(D)$ un suport al lui D format din p linii şi q coloane. Notăm

$$X^+=\{x_i\in X \mid x_i\in S(D)\},\ X^-=X-X^+$$

$$Y^+=\{y_i\in Y \mid y_j\in S(D)\},\ Y^-=Y-Y^+.$$

Avem card $X^+=p$ şi card $Y^+=q$. Conform definiţiei suportului matricii $\mathcal{A}^+(X^-)=\varnothing$ şi $\mathcal{A}^-(Y^-)=\varnothing$, adică nu există arce incidente la vîrfurile $x_i\in X^-$ şi $y_j\in Y^-$ în graful bipartit $G=(X, Y, F)$ definit de matricea D. Considerăm acum reţeaua

de transport atașată grafului bipartit $G=(X, Y, F)$ cu sursa x_0 și destinația y_{n+1}. Corespunzător suportului $S(D)$ al matricii considerăm mulțimea de vîrfuri $Z=X^+ \cup Y^- \cup \{y_{n+1}\}$ în rețeaua de transport care definește o tăietură $\mathcal{A}^-(Z)$ cu capacitatea $c[\mathcal{A}^-(Z)]=p+q$ (fig. 7.4). Am arătat astfel că pentru un suport

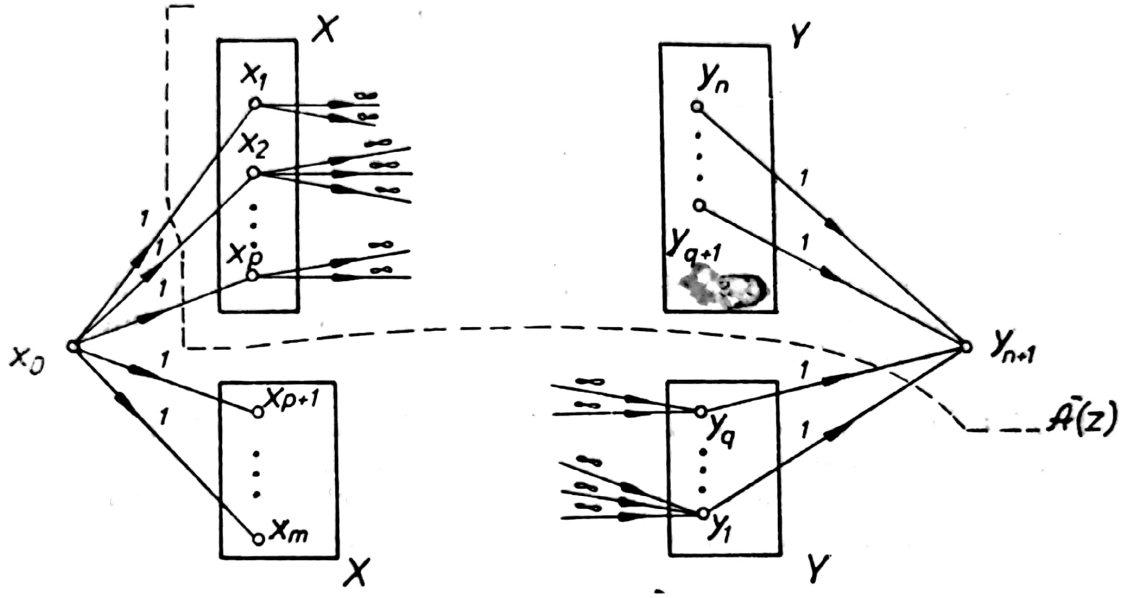


Fig. 7.4.

al matricii $S(D)$, există o tăietură $\mathcal{A}^-(Z)$ al rețelei de transport, astfel încît

$$c[\mathcal{A}^-(Z)]=\text{card } S(D).$$

Reciproc, considerînd o tăietură de capacitate finită în rețeaua de transport, $\mathcal{A}^-(Z)$, ea conține doar arce de tipul (x_0, x_i), $x_i \in X$ și (y_j, y_{n+1}), $y_j \in Y$, deoarece în caz contrar ar avea capacitatea ∞. Înseamnă că $Z=X^+ \cup Y^- \cup \{y_{n+1}\}$ și $X^+ \cup (Y-Y^-)=S(D)$ este un suport al matricii D. Rezultă deci că fiecărei tăieturi de capacitate finită în rețeaua de transport asociată matricii îi corespunde un suport al matricii.

Fie $\mathcal{A}^-(Z_0)$ tăietura de capacitate minimă din rețeaua ei îi corespunde un suport minimal al matricii:

$$c[\mathcal{A}^-(Z_0)]=\sigma(D). \tag{7.4}$$

Pe de altă parte, conform teoremei Ford-Fulkerson, tăieturii de capacitate minimă îi corespunde fluxul maxim în rețea:

$$c[\mathcal{A}^-(Z_0)]=max\ \{v(f)\}. \tag{7.5}$$

Din (7.4) și (7.5) rezultă $\sigma(D)=max\ \{v(f)\}$ și deoarece fluxul maximal este egal cu numărul elementelor cuplajului maximal (teorema 7.2), rezultă egalitatea (7.3) din enunț.

Teorema 7.2 permite construcția unui alt procedeu pentru determinarea cuplajului maximal al unui graf bipartit.

Fie un graf bipartit $G=(X, Y, F)$ cu card $X=m$, card $Y=n$ cu matricea $B=(b_{ij})$, $i=1\div m$, $j=1\div n$, definită prin

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & \text{dacă} \quad y_j\in F(x_i)\\ 0, & \text{dacă} \quad y_j\notin F(x_i)\end{cases}$$

Pasul 1. Se construieşte matricea complementară $\bar{B}$ a matricii grafului, cu elementele

$$\bar{b}_{ij}=\begin{cases}0, & \text{dacă} \quad b_{ij}=1\\ 1, & \text{dacă} \quad b_{ij}=0.\end{cases}$$

Pasul 2. În matricea $\bar{B}$ se identifică linia (sau coloana) cu cele mai puţine zerouri şi se încadrează un element nul. Se elimină toate elementele zero din linia şi coloana zeroului încadrat.

Pasul 3. În submatricea rămasă se reia procedeul din Pasul 2 pînă la epuizarea tuturor elementelor $\bar{b}_{ij}=0$ (care sînt deci fie încadrate, fie eliminate). Mulţimea de linii şi coloane corespunzătoare elementelor încadrate furnizează suportul minimal al matricii $\bar{B}$ şi deci şi cuplajul maximal.

Exemplul 7.2. Pentru graful din fig. 7.1, matricile B şi $\bar{B}$ sînt :

$B=$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0	1	0	0	0
x_2	1	0	1	1	0
x_3	0	1	0	0	1
x_4	0	0	0	0	1
x_5	0	0	1	1	0
x_6	0	0	0	1	1

$\bar{B}=$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_1	1	[0]	1	1	1
x_2	[0]	1	✗	✗	1
x_3	1	✗	1	1	✗
x_4	1	1	1	1	[0]
x_5	1	1	[0]	✗	1
x_6	1	1	1	[0]	✗

Liniile cu cele mai puţine zerouri sînt x_1 şi x_4. Ne fixăm pentru linia x_1 şi încadrăm $\bar{b}_{12}=0$ şi eliminăm $\bar{b}_{32}=0$. Pentru încadrare putem alege acum între $\bar{b}_{35}=0$ şi $\bar{b}_{45}=0$. Alegem $\bar{b}_{45}=0$ şi eliminăm $\bar{b}_{35}=0$ şi $\bar{b}_{65}=0$. Următoarea încadrare posibilă este unică : $\bar{b}_{64}=0$, ceea ce elimină $\bar{b}_{54}=0$ şi $\bar{b}_{24}=0$. Urmează încadrarea elementului $\bar{b}_{53}=0$ şi eliminarea $\bar{b}_{23}=0$. Ultima încadrare posibilă este $\bar{b}_{21}=0$. S-a obţinut astfel cuplajul maximal (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_4, y_5), (x_5, y_3), (x_6, y_4), vîrful x_3 rămînînd izolat.

Observaţie. Cuplajul maximal din exemplul dat nu este unic, deoarece pe parcursul aplicării procedeului a existat posibilitatea alegerii. Dealtfel, în exemplul 7.1 s-a obţinut un alt cuplaj maximal, care izolează x_4.

Scanned with OKEN Scanner

Odată construit cuplajul maximal U^0 al grafului bipartit $G=(X, Y, F)$, suportul său minimal S^0 se determină astfel: Fie $\bar{X}$ mulțimea vîrfurilor izolate în X de cuplajul maximal U^0 și $\bar{Y}$ mulțimea vîrfurilor din Y pe care le izolează U^0.

— Dacă $\bar{X}=\emptyset$, atunci $X=S^0$, iar dacă $\bar{Y}=\emptyset$ atunci $Y=S^0$.

— Dacă $\bar{X}\neq\emptyset$ și $\bar{Y}\neq\emptyset$ dar pentru mulțimile $F(\bar{X})=\{y_k\in Y \mid (x_i, y_k\in \in\mathcal{A}, x_i\in\bar{X}\}$ și $F^{-1}(\bar{Y})=\{x_h\in X \mid (x_h, y_j)\in\mathcal{A}, y_j\in\bar{Y}\}$ avem card $F(X)+$card $F^{-1}(\bar{Y})=$ $=$card U^0, atunci suportul minimal este $S^0=F(\bar{X})\cup F^{-1}(\bar{Y})$.

În exemplul 7.2 avem $\bar{X}=\{x_3\}$ și $\bar{Y}=\emptyset$, deci $S^0=\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$.

§7.2. PROBLEMA DE AFECTARE

7.2.1. MODELUL PROBLEMEI DE AFECTARE

A afecta înseamnă — aici — a aloca, a atribui, cu respectarea unor condiții. Această repartiție este însoțită în practica economică de aspecte valorice: eforturi valorice, eficiență etc. și este deci normală problema realizării unei afectări optime. Pentru a construi modelul problemei de afectare examinăm următorul aspect:

m muncitori x_i, $i=1\div m$ pot executa fiecare cel puțin una din n lucrări y_j, $j=1\div n$. Executarea lucrării y_j de către muncitorul x_i conduce la un cost $c_{ij}\geqslant 0$ (dacă x_i nu poate realiza y_j, $c_{ij}=\infty$). Se cere o repartizare a celor m muncitori pe cele n lucrări, astfel încît fiecare muncitor să realizeze o singură lucrare și fiecare lucrare să fie efectuată de un singur muncitor cu un cost total minim.

Considerăm $m\cdot n$ variabile z_{ij}, $i=1\div m$, $j=1\div n$ care nu pot lua decît valorile 0 dacă x_i nu efectuează lucrarea y_j și 1 dacă x_i este repartizat la lucrarea y_j. Cu aceasta, problema de afectare devine o problemă de optimizare cu funcția obiectiv

$$\min f(z)=\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}z_{ij}, \tag{7.6}$$

cu condițiile

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij}\leqslant 1,\ j=1\div n \tag{7.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij}\leqslant 1,\ i=1\div m \tag{7.8}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}=\min\ (m,\ n) \tag{7.9}$$

$$z_{ij}\in\{0,\ 1\},\ i=1\div m,\ j=1\div n. \tag{7.10}$$

Această problemă de programare discretă poate fi rezolvată prin algoritmi specifici, de exemplu, de tip Branch-and-Bound, dar poate fi abordată și cu ajutorul grafurilor.

Mulțimile $X=\{x_1, \ldots, x_m\}$ și $Y=\{y_1, \ldots, y_n\}$ definesc împreună cu repartizările (x_i, y_j) posibile un graf bipartit cu mulțimea arcelor $\mathcal{A}$, $G=(X, Y, F)$ în care fiecărui arc i s-a asociat valoarea c_{ij}. Restricția (7.8) arată că doar unul din arcele incidente exterior la x_i, $i=1\div m$, contribuie la formarea valorii optime a funcției obiectiv (7.6), iar conform restricției (7.7) cel mult unul din arcele incidente interior lui y_j, $j=1\div n$ participă la formarea valorii optime a funcției obiectiv. Înseamnă că soluția optimă a problemei de afectare este definită de arcele unui cuplaj al grafului bipartit $G=(X, Y, F)$. Restricția (7.9) cere ca acest cuplaj să fie maximal, deoarece pentru $m<n$, el cuplează X în Y, pentru $m>n$, realizează cuplajul lui Y în X, iar dacă $m=n$, cuplajul căutat cuplează pe X pe Y. Rezolvarea problemei de afectare revine deci la determinarea unui cuplaj maximal cu suma valorilor arcelor minime în graful bipartit atașat problemei.

De cele mai multe ori problema de afectare presupune $m=n$. În această situație, restricțiile se scriu

$$\sum_{i=1}^{n} z_{ij}=1, \qquad j=1\div n \tag{7.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij}=1, \qquad i=1\div n. \tag{7.12}$$

Observații 1^0. Problema de tip maxim se reduce la modelul descris, prin intermediul transformării

$$v_{ij}=c_{hr}-c_{ij}, \quad i, j=1\div n, \quad c_{hr}=\max_{i, j} c_{ij}. \tag{7.13}$$

Într-adevăr, avem

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}z_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_{hr}-v_{ij})\,z_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{hr}z_{ij}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij}z_{ij}=n\,c_{hr}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij}z_{ij},$$

de unde rezultă

$$\max \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}z_{ij}=n.\ c_{hr}-\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij}z_{ij}.$$

2^0. Cazurile $m>n$ și $m<n$ se reduc la modelul (7.6), (7.11) (7.12), (7.10) introducînd arce fictive de valoare nulă.

7.2.2. REZOLVAREA PROBLEMEI DE AFECTARE

Fie $G=(X, Y, F)$ graful bipartit care modelează o problemă de afectare în care card $X=$card Y și construim matricea valorilor arcelor $K=(k_{ij})$, $i, j=1\div n$ cu elementele

$$k_{ij}=\begin{cases} c_{ij}, & \text{dacă} \quad (x_i, y_j)\in \mathcal{A} \\ \infty, & \text{dacă} \quad (x_i, y_j)\notin \mathcal{A}. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

După cum am văzut, rezolvarea problemei de afectare revine la selectarea cuplajului maximal din graful bipartit pentru care suma valorilor arcelor componente este minimă.

Fie $\{U_1^0, U_2^0, \ldots, U_r^0\}$ mulțimea cuplajelor maximale și $\mathcal{F}=\{f_h=\sum_{(x_i,y_j)\in U_h^0} k_{ij}, h=1\div r\}$ mulțimea sumelor valorice arcelor care compun cuplajele maxime. Are loc

Teorema 7.4. *Ordinea determinată de relația „$\leqslant$" între elementele mulțimii $\mathcal{F}$ nu se modifică dacă la elementele unei linii sau coloane din matricea K se adună un același număr λ.*

Deoarece U_h^0 realizează un cuplaj complet (al lui X pe Y) în graful $G=(X, Y, F)$, fiecare $f_h\in\mathcal{F}$ conține un termen finit, și numai unul, din fiecare linie și coloană a matricii K. Adăugînd λ la elementele unei linii și coloane, obținem $f_h'=f_h+\lambda$, $h=1\div r$ și deci $f_{h'}'\leqslant f_{h''}''$, dacă și numai dacă $f_{h'}\leqslant f_{h''}$, oricare ar fi h', $h''=1\div r$.

Această teoremă stă la baza *algoritmului ungar* pentru rezolvarea problemei de afectare, în care ideea centrală este identificarea treptată a arcelor care pot conduce la un cuplaj maximal de valoare minimă.

Algoritmul ungar este un proces secvențial ce se desfășoară în următoarele etape.

Etapa 1. Se transformă matricea $K=(k_{ij})$, $i, j=1\div n$ într-o matrice $K^1=(k_{ij}^1)$ care să conțină cel puțin un element nul în fiecare linie și coloană. În acest scop se scade din elementele fiecărei linii elementul ei cel mai mic. Dacă rămîn coloane fără zerouri, se reia operațiunea pe coloanele matricii obținute. (Desigur ordinea linii-coloane poate fi inversată.)

Etapa 3. În graful parțial G^1 determinat de elementele $k_{ij}^1=0$ se caută un cuplaj maximal. Dacă acesta realizează cuplarea lui X pe Y el constituie soluția problemei. Dacă cuplajul maximal din G^1 nu realizează cuplarea lui X pe Y, se determină suporturi minimal corespunzător și se trece la etapa 3. Fie S un suport minimal aferent cuplajului U_1^0 din G^1.

Etapa 2. Se elimină din matricea K^1 liniile și coloanele suportului S_1^0 și se determină elementul minim ω al submatricii rămase. Se construiește o nouă matrice K^2, adunînd ω la elementele coloanelor din S_1^0 și scăzînd ω din liniile care nu aparțin suportului S_1^0. Cu matricea K^2 astfel obținută se reia etapa 2.

Procedeul folosit păstrează toate elementele nule din K^1 cu excepția celor situate la intersecția liniilor și coloanelor din S_1^0. Într-adevăr, dacă $k_{ij}^1=0$, atunci $x_i\in S_1^0$ și $y_j\notin S_1^0$ sau $x_i\notin S_1^0$ și $y_j\in S_1^0$. Dacă $x_i\in S_1^0$, conform procedeului $k_{ij}^1=k_{ij}^2=0$. Dacă $y_j\in S_1^0$, atunci $k_{ij}^2=k_{ij}^1+\omega-\omega=k_{ij}^1=0$. Dacă pentru $k_{ij}^1=0$ avem $x_i\in S_1^0$ și $y_j\in S_1^0$, atunci $k_{ij}^2=k_{ij}^1+\omega=\omega>0$. Dispariția unui astfel de

Scanned with OKEN Scanner

zero nu prezintă importanță, pentru că n-ar putea contribui la îmbunătățirea cuplajului.

Procedeul mărește numărul arcelor din cuplaj, deoarece conduce la zerouri în submatricea care în etapa 2 n-a fost luată în considerare

Exemplul 7 3. Șase muncitori $x_1, x_2, \ldots, x_6$ trebuie repartizați pe șase mașini $y_1, y_2, \ldots, y_6$ astfel încît la fiecare mașină să lucreze un singur muncitor. Din experiența trecută s-a constatat că procentajul de rebuturi diferă de la un muncitor la altul, în funcție de calificarea și priceperea fiecăruia, în conformitate cu datele din tabelul 7.1.

Tabelul 7.1

Procentaje de rebuturi

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	0,002	0,005	0,004	0,003	0,004	0,005
x_2	0,003	0,005	0,005	0,004	0,006	0,007
x_3	0,001	0,003	0,003	0,004	0,003	0,005
x_4	0,005	0,002	0,004	0,004	0,004	0,006
x_5	0,003	0,001	0,003	0,004	0,003	0,004
x_6	0,004	0,005	0,002	0,002	0,002	0,004

Se cere repartizarea muncitorilor pe mașini astfel încît procentajul total de rebuturi să fie minim.

Pentru aplicarea algoritmului considerăm matricea K atașată problemei amplificînd elementele tabelului 7.1 cu 1 000 și evidențiem în dreptul fiecărei linii elementul minim. După scăderea pe fiecare linie a elementului minim obținem matricea $\bar{K}$, în care coloana y_6 nu conține nici un zero. Scădem deci din coloana șase elementul ei minim 2.

$K=$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
x_1	2	5	4	3	4	5	2
x_2	3	5	5	4	6	7	3
x_3	1	3	3	4	3	5	1
x_4	5	2	4	4	4	6	2
x_5	3	1	3	4	3	4	1
x_6	4	5	2	2	2	4	2

$\bar{K}=$

0	3	2	1	2	3	
0	2	2	1	3	4	
0	2	2	3	2	4	
3	0	2	2	2	4	
2	0	2	3	2	3	
2	3	0	0	0	2	
						2

Scanned with OKEN Scanner

Obținem

$K^1 =$

0	3	2	1	2	1
0	2	2	1	3	2
0	2	2	3	2	2
3	0	2	2	2	2
2	0	2	3	2	1
2	3	0	0	0	0

Pentru a construi un cuplaj maximal în subgraful G^1 definit de zerourile din K^1, renunțăm la elementele nenule și avem, de exemplu

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	0*					
x_2	0					
x_3	0					
x_4		0*				
x_5		0				
x_6			0*	0	0	0

Cuplajul (x_1, y_1), (x_4, y_2), (x_6, y_3) este un cuplaj maximal, dar nu cuplează X pe Y și deci identificăm suportul minimal corespunzător. Mulțimea vîrfurilor izolate este $\bar{X} = \{x_2, x_3, x_5\}$ și $\bar{Y} = \{y_4, y_5, y_6\}$. Avem $F(\bar{X}) = \{y_1, y_2\}$ și $F^{-1}(\bar{Y}) = \{x_6\}$ și cum card $F(\bar{X})$ + card $F^{-1}(\bar{Y}) = 3$ este egal cu numărul arcelor din cuplaj, suportul minimal este $S_1^0 = \{x_6, y_1, y_2\}$

În K^1 suprimăm linia x_6 și coloanele y_1 și y_2 și găsim elementul minim rămas $\omega_1 = 1$ pe care-l adunăm la coloanele y_1, y_2 și-l scădem din liniile x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Obținem astfel matricea K^2.

$K^1 =$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
x_1	0	3	2	1	2	1	−1
x_2	0	2	2	1	3	2	−1
x_3	0	2	2	3	2	2	−1
x_4	3	0	2	2	2	2	−1
x_5	2	0	2	3	2	1	−1
x_6	−2	−3	−0	−0	−0	−0	
	+1	+1					

$K^2 =$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	0	3	1	0	1	0
x_2	0	2	1	0	2	1
x_3	0	2	1	2	1	1
x_4	3	0	1	1	1	1
x_5	2	0	1	2	1	0
x_6	3	4	0	0	0	0

Scanned with OKEN Scanner

În K^2 evidențiem un cuplaj pentru subgraful G^2 format din elementele nule :

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
x_1	0			0		0	
x_2	0			0*			
x_3	0*						
x_4		0*					
x_5		0				0*	
x_6			0	0	0*	0	*
	*	○		*		*	

Cuplajul marcat menține izolat vîrfurile x_1 și y_3, deci nu este complet. Pentru a evidenția un suport minimal, observăm că $F(x_1)=\{y_1, y_4, y_6\}$ și $F^{-1}(y_3)=\{x_6\}$ și card $F(x_1)$+card $F^{-1}(y_3)=4$ este un număr mai mic decît numărul arcelor din cuplaj (5). Pentru a găsi suportul minimal, marcăm coloanele din $F(x_1)$ și liniile din $F^{-1}(y_3)$. Constatăm că în cuplaj există arcul (x_4, y_2) cu nici un vîrf marcat. Arce incidente exterior la x_4 nu sînt în graful G^2, dar există un arc, (x_5, y_2), incident interior la y_2. De aceea marcăm și coloana y_2 și am obținut suportul minimal $S_2^0=\{x_6, y_1, y_2, y_4, y_6\}$. În matricea K^2 suprimăm liniile și coloanele din S_2^0 și determinăm elementul minim din matricea rămasă, $\omega_2=1$.

$K^2=$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
x_1	0	3	1	0	1	0	−1
x_2	0	2	1	0	2	1	−1
x_3	0	2	1	2	1	1	−1
x_4	3	0	1	1	1	1	−1
x_5	2	0	1	2	1	0	−1
x_6	−3	−4	−0	−0	−0	−0	
	+1	+1		+1		+1	

$K^3=$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	0	3	0	0	0	0
x_2	0	2	0	0	1	1
x_3	0	2	0	2	0	1
x_4	3	0	0	1	0	1
x_5	2	0	0	2	0	0
x_6	4	5	0	1	0	0

ω_2 se adună la coloanele $y_j \in S_2^0$ și se scade din liniile $x_i \notin S_2^0$, obținînd matricea K^3. Considerăm un cuplaj maximal în subgraful G^3 definit de zerourile din K^3.

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	0		0	0*	0	0
x_2	0		0*	0		
x_3	0*		0		0	
x_4		0*	0		0	
x_5		0	0		0*	0
x_6			0		0	0*

Cuplajul este complet şi oferă soluţia optimă a problemei : repartiţia (x_1, y_4), (x_2, y_3), (x_3, y_1), (x_4, y_2), (x_5, y_5), (x_6, y_6) realizează valoarea minimă a funcţiei obiectiv

$$f_{min}=c_{14}+c_{23}+c_{31}+c_{42}+c_{55}+c_{66}=3+5+1+2+3+4=18.$$

Desigur, această repartiţie optimă nu este unică, deoarece în subgraful G^3 pot fi construite şi alte cuplaje maximale.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. Arghiriade, E. *Curs de algebră superioară*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1962.
2. Arghiriade, E., Dragomir, A., Dragomir, P. *Algebră*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1964.
3. Berge, C. *Teoria grafurilor şi aplicaţiile ei*, Editura tehnică, Bucureşti, 1969.
4. Boroş, E., Opriş, D. *Introducere în optimizarea liniară şi aplicaţii*, Editura Facla, Timişoara 1979.
5. Ciorănescu, N., Roşculeţ, M. *Culegere de probleme de algebră şi analiză matematică*, Editura tehnică, Bucureşti, 1969.
6. Cruceanu, V. *Elemente de algebră liniară şi geometrie*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1973.
7. Demidovici, P., B. *Culegere de probleme şi exerciţii de analiză matematică*, Editura tehnică, Bucureşti, 1956.
8. Donciu, N., Flondor, D., Simionescu, Gh. *Algebră şi analiză matematică. Culegere de probleme.* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1964.
9. Dragomirescu, M., Maliţa, M. *Programare pătratică*, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1968.
10. Drăgan, I. *Tehnici de bază în programare liniară*, Editura tehnică, Bucureşti, 1976.
11. Fihtenholţ, G., M. *Curs de calcul diferenţial şi integral*, vol. II (1964), vol. III (1965). Editura tehnică, Bucureşti.
12. Ionescu, H., Dinescu, C., Burlacu, V. *Teoria grafelor şi unele aplicaţii în economie*, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1969.
13. Ionescu, T. *Grafuri. Aplicaţii*, vol. I (1973), vol. II (1974), Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti.
14. Kaufmann, A., Desbazeille, G. *Metoda drumului critic*, Editura tehnică, Bucureşti, 1971.
15. Mihăilă, N., Popescu, O. *Matematici speciale aplicate în economie*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1978.
16. Mihoc, Gh., Ştefănescu, A. *Programarea matematică*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1973.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Prefață 5

I. Elemente de algebră liniară .... P. Stanciu, D. Criveanu 8

1. Algebră matriceală 8
1.1. Generalități 8
1.2. Egalitatea matricelor 9
1.3. Operații cu matrice 10
1.4. Matricea inversă 13
1.5. Operații cu matrice prin partiționare 16
1.6. Rangul unei matrice 18

2. Sisteme de ecuații liniare 22
2.1. Generalități. Forma matriceală 22
2.2. Sisteme de n ecuații liniare cu n necunoscute 23
2.3. Sisteme de m ecuații liniare cu n necunoscute 24
2.4. Sisteme liniare omogene 26

3. Algebra vectorială 28
3.1. Spațiul vectorial 28
3.2. Dependența liniară a vectorilor 29
3.3. Bază în R^n. Coordonatele unui vector într-o bază dată 31
3.4. Schimbarea bazei 34
3.5. Forma redusă a unei matrice corespunzătoare unei baze 36
3.6. Aplicații ale metodei pivotului în algebră 37
3.7. Spațiul euclidian 44

4. Forme liniare. Forme pătratice 46
4.1. Transformări liniare 46
4.2. Forme pătratice 49

II. Noțiuni de geometrie analitică .... P. Stanciu, D. Criveanu 56

1. Spațiul vectorial 56
1.1. Mărimi vectoriale. Vectori 56
1.2. Operații cu vectori 56

Scanned with OKEN Scanner

1.3. Dependența liniară a vectorilor 58
1.4. Coordonate carteziene. Expresia analitică a unui vector 59
1.5. Izomorfismul dintre spațiile vectoriale R^3 și V^3. Generalizarea noțiunii de spațiu 61

2. Spațiul euclidian 62
2.1. Produsul scalar a doi vectori 62
2.2. Produsul vectorial a doi vectori 65

3. Aplicații ale calculului vectorial în geometrie 68
3.1. Distanța între două puncte 68
3.2. Coordonatele unui punct care împarte un segment într-un raport dat 69
3.3. Aria unui triunghi 70
3.4. Volumul tetraedrului 71
3.5. Determinarea unei direcții 72

4. Varietăți liniare 74
4.1. Diferite forme ale ecuației dreptei 74
4.2. Ecuația planului 77
4.3. Probleme de unghiuri 78
4.4. Probleme de intersecție 80
4.5. Probleme de distanță 82
4.6. Fascicol de drepte. Fascicul de plane 84
4.7. Semispații 85

5. Cercul și sfera 86
5.1. Ecuația sferei 86
5.2. Cercul în spațiu 87

III. **Elemente de analiză matematică** .... Gh. David 89
1. Integrala Riemann. 89
1.1. Definiția integralei Riemann 89
1.2. Proprietăți ale sumelor Darboux 94
1.3. Criterii de integrabilitate. Clase de funcții integrabile 96
1.4. Proprietăți ale funcțiilor integrabile 99
1.5. Formula mediei pentru integrale 104
1.6. Primitive. Integrale nedefinite 105
1.7. Tabloul primitivelor curente 108
1.8. Metode de integrare 110
1.9. Integrarea fracțiilor raționale 119
1.10. Integrale reductibile la integrale de funcții raționale 124
1.11. Extinderea noțiunii de integrală definită 138
1.12. Integrala Stieltjes 140

2. Serii 150
2.1. Asupra convergenței șirurilor numerice 150
2.2. Serii numerice 152
2.3. Șiruri de funcții 173
2.4. Serii de funcții 178

Scanned with OKEN Scanner

2.5. Serii de puteri 182
2.6. Formula lui Taylor. Seria Taylor, seria Mac-Laurin 187

3. Funcţii de mai multe variabile 199
3.1. Noţiuni de teoria mulţimilor 199
3.2. Asupra noţiunii de funcţie 207
3.3. Funcţii reale de *n* variabile (de o variabilă vectorială) 209
3.4. Limita unei funcţii 210
3.5. Continuitatea funcţiilor 212
3.6. Derivate parţiale 217
3.7. Diferenţiala unei funcţii de mai multe variabile 222
3.8. Derivatele şi diferenţialele funcţiilor compuse 225
3.9. Formula lui Taylor pentru funcţii de mai multe variabile 231
3.10. Extremele funcţiilor de mai multe variabile 234
3.11. Funcţii implicite 239
3.12. Sisteme de funcţii implicite 244
3.13. Extreme condiţionate 246
3.14. Integrale care depind de un parametru 255
3.15. Integrale multiple 259

IV. **Programarea liniară** ..... P. Stanciu, D. Criveanu 274
1. Modele ale problemei de programare liniară 274
1.1. Programarea matematică 274
1.2. Clasificarea soluţiilor. Proprietăţi 280
1.3. Interpretarea geometrică a problemelor de programare liniară .. 285

2. Algoritmul simplex 290
2.1. Teoremele algoritmului simplex 290
2.2. Enunţarea algoritmului simplex 293
2.3. Efectuarea calculelor în aplicarea algoritmului simplex 293
2.4. Determinarea unui program iniţial 295
2.5. Probleme de programare liniară cu mai multe programe optime .. 298
2.6. Degenerarea în programarea liniară 300
2.7. Interpretarea economică a algoritmului simplex 304
2.8. Probleme de programare liniară în care variabilele nu satisfac condiţiile de nenegativitate 306

3. Dualitatea în programarea liniară 308
3.1. Definiţia diualităţii. 308
3.2. Proprietăţi ale dualităţii 311
3.3. Rezolvarea simultană a unui cuplu de probleme duale 314
3.4. Algoritmul simplex dual 317
3.5. Interpretarea economică a dualităţii 321

4. Problema transporturilor 323
4.1. Particularităţile problemei transporturilor 323
4.2. Determinarea unui program de bază iniţial 326
4.3. Testarea şi îmbunătăţirea unui program de bază 330
4.4. Cazuri deosebite în problema transporturilor 333

Scanned with OKEN Scanner

5. Reoptimizări în programarea liniară 340
5.1. Aspectul economic şi matematic al problemei 340
5.2. Modificarea coeficienţilor funcţiei obiectiv 342
5.3. Modificarea vectorului termenilor liberi al restricţiilor 344
5.4. Modificarea unui vector coloană al matricei restricţiilor 345
5.5. Adăugarea unei variabile suplimentare 348
5.6. Adăugarea unei restricţii 349
5.7. Modificarea matricei costurilor în problema transporturilor 352

6. Elemente de programare liniară parametrică 356
6.1. Parametrizarea coeficienţilor funcţiei de eficienţă 356
6.2. Parametrizarea termenilor liberi ai restricţiilor 359

V. Aplicaţii ale teoriei grafurilor .... W. Fuchs 364
1. Noţiunea de graf 364
2. Drumuri de valoare optimă 368
2.1. Algoritmul Ford 369
2.2. Algoritmul Bellman-Kalaba 372

3. Drumuri hamiltoniene 376
3.1. Algoritmul Foulkes 376
3.2. Produsul matricilor latine 380

4. Arbore de valoare minimă 383
4.1. Arbori 383
4.2. Algoritmul Kruskal 384

5. Planificarea în grafuri 388
5.1. Graful de evenimente ataşat unui proces 389
5.2. Date timpurii. Drumul critic 391
5.3. Date tîrzii 393
5.4. Rezerve. Activităţi subcritice 395
5.5. Planificarea în graful de activităţi ataşat unui proces 397
5.6. Un exemplu 399

6. Flux maximal în reţele de transport 404
6.1. Reţele de transport 404
6.2. Algoritmul Ford-Fulkerson 407

7. Cuplajul mulţimilor disjuncte 412
7.1. Cuplaje în grafuri bipartite 412
7.2. Problema de afectare 419

Bibliografie 426

Scanned with OKEN Scanner

Redactor : ION ILIN
Tehnoredactor : IOAN I. IANCU

Bun de tipar : 8.05.1981
Apărut 1981
Coli tipar : 27

Întreprinderea Poligrafică „Banat"
Timișoara, Calea Aradului nr. 1
Comanda nr. 58

Scanned with OKEN Scanner